226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Pandou

10 mai 2022

1 Suites récurrentes

1.1 Généralités

Définition 1. *Soit $p \geqslant 1$, on dit que (u_n) est récurrente d'ordre p si il existe une fonction $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall n \geqslant p, u_n = f(u_{n-1}, ..., u_{n-p})$$

Proposition 2. *On reprend les notations précédentes, si (u_n) converge vers une limite ℓ et f est continue en $(\ell, ..., \ell) \in \mathbb{R}^p$, alors*

$$\ell = f(\ell, ..., \ell)$$

Exemple 3 : La seule limite possible de la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ est 0.

Proposition 4 (Cas réel)**.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset I$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.*

1. *Si f est croissante, alors (u_n) est monotone.*
2. *Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de monotonie opposé.*

Remarque 5 : Toute suite récurrence d'ordre p peut être transformée en une suite récurrence d'ordre 1 : si $u_n = f(u_{n-1}, ..., u_{n-p})$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ et on a

$$U_{n+1} = F(U_n) \qquad \text{avec} \qquad F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ f(x_1, ..., x_p) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

1.2 Quelques familles de suites classiques

Remarque 6 : En général, à partir d'une relation de récurrence $U_{n+1} = F(U_n)$, il est difficile de trouver une fonction G telle que $U_n = G(n)$. Mais dans le cas des familles de suites suivantes, on le fait.

Définition 7. *On dit que la suite (u_n) est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que $u_{n+1} = u_n + r$, r est appelé la raison de la suite.*

Proposition 8. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Définition 9. *On dit que la suite (u_n) est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{C}$ tel que $u_{n+1} = qu_n$, q est appelé la raison de la suite.*

Proposition 10. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$$

Corollaire 11. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors*

1. *(u_n) diverge si $|q| > 1$.*
2. *(u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$.*

Définition 12. *On dit que la suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe $q, r \in \mathbb{C}$ tels que $u_{n+1} = qu_n + r$.*

Proposition 13. *Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de paramètres (q, r). On suppose que $q \neq 1$. On note ℓ le point fixe de $x \longmapsto qx + r$. Alors, $(u_n - \ell)_n$ est une suite géométrique de rayon q.*

Corollaire 14. *Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de paramètres (q, r), alors*

$$u_n = \begin{cases} q^n \left(u_0 - \dfrac{r}{1-q}\right) + \dfrac{r}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_0 + nr & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 15. *On dit que la suite (u_n) est homographique si elle est de la forme $u_{n+1} = h(u_n)$ avec $h : x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad - bc \neq 0$.*

Proposition 16. *Soit (u_n) une suite homographique associée à la fonction h. Alors, h a au plus deux points fixes et :*

1. *Si h a deux points fixes α et β, alors $\left(\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)$ est une suite géométrique.*
2. *Si h a qu'un seul point fixe α, alors $\left(\dfrac{1}{u_n-\alpha}\right)$ est une suite arithmétique.*

1.3 Suites récurrentes linéaires

Définition 17. *On dit qu'une suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre p à coefficients constants si on a*

$$\forall n \geqslant p, u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_p u_{n-p}$$

avec $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$.

Théorème 18. *L'équation $x^p - a_1 x^{p-1} - \ldots - a_p = 0$ est appelée équation caractéristique de la récurrence. On note $r_1, \ldots, r_q$ ses racines et $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ leur ordre de multiplicité. Alors, il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_n$ tels que $\deg(P_i) < \alpha_i$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = P_1(n) r_1^n + \ldots + P_q(n) r_q^n$$

Exemple 19 : On considère une récurrence linéaire d'ordre 2 complexe : $u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}$. On note $x^2 - ax - b = 0$ l'équation caractéristique associée.

- Si l'équation a deux racines distinctes r_1, r_2, alors $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et on a $\begin{cases} u_0 &= \lambda + \mu \\ u_1 &= \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$.
- Si l'équation a une racine double r, alors $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$ avec $\begin{cases} u_0 &= \mu \\ u_1 &= (\lambda + \mu) r \end{cases}$.

Remarque 20 : En général, il faut pouvoir résoudre une équation polynomiale de degré p, ce qui est en général difficile pour $p \geqslant 3$.

2 Théorèmes de point fixe

2.1 Théorème de Picard

Théorème 21 (Point fixe de Picard)**.** *Soit X un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application k-contractante, $k < 1$, alors f admet un unique point fixe $\overline{x}$ dans X et pour tout $x \in X$, la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $\overline{x}$.*
De plus, on a l'estimation de la vitesse de convergence :

$$d(\overline{x}, x_n) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Remarque 22 : L'hypothèse $k < 1$ est primordiale. En effet, par exemple $f : x \in [1, +\infty[\longmapsto x + \dfrac{1}{x} \in [1, +\infty[$ n'a pas de point fixe, mais pourtant, on a $\left|f(x) - f(y)\right| < |x - y|$.

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 23 (Point fixe compact)**.** *Soit X un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow X$ continue telle que*

$$\forall x \neq y, d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$$

Alors, f a un unique point fixe $\overline{x} \in X$. De plus, pour tout $x \in X$, la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $\overline{x}$.

Remarque 24 : La convergence n'est plus nécessairement aussi rapide que pour le théorème de point fixe de Picard. Par exemple, si $f : x \in [0,1] \longmapsto x - x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ prolongée en 0 par 0, alors la suite (x_n) associée vérifie

$$x_n \sim \frac{1}{\ln(n)}$$

Remarque 25 : La méthode de chercher une estimation de $u_{n+1} - u_n$, puis de sommer les relations de comparaison pour obtenir une estimation de u_n est assez générale.

Théorème 26 (Point fixe itéré)**.** *Soit X un espace complet et $f : X \longrightarrow X$ tel que $f^{\circ p}$ est k-contractante pour $k < 1$. Alors, f admet un unique point fixe $\overline{x}$ et pour tout $x \in X$, la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $\overline{x}$.*

Application 27 : On peut résoudre une équation $f(x) = 0$ en la transformant en un problème de point fixe : on a $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) := x - Cf(x) = x$ où C est une constante que l'on peut régler pour que φ soit contractante.

2.2 Classification dans le cas réel

Théorème 28. *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \longrightarrow I$ une application $\mathcal{C}^1$ et a un point de φ.*

- *Si $\left|\varphi'(a)\right| < 1$, alors il existe un voisinage V de a tel que si $x_0 \in V$, alors la suite récurrente $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a. De plus, la convergence est géométrique.*
  On dit que a est un point fixe attractif.
- *Si $\varphi'(a) = 0$ et si φ est $\mathcal{C}^2$, alors la vitesse de convergence est même quadratique.*
  On dit que a est un point fixe super attractif.
- *Si $\left|\varphi'(a)\right| > 1$, alors il existe un voisinage V de a tel que si $x_0 \in V \setminus \{a\}$, alors la suite récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ne converge pas vers a.*
  On dit que a est un point fixe répulsif.

Remarque 29 : Si $\left|\varphi'(a)\right| = 1$, on ne peut rien dire comme le montre les exemples :

- $\varphi(x) = \sin(x)$, alors $\left|\varphi'(0)\right| = 1$, mais $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers 0.

- $\varphi(x) = \mathrm{sh}(x)$, alors $|\varphi'(0)| = 1$, mais $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ diverge vers $+\infty$, sauf si $x_0 = 0$.

Interprétation graphique 30 : (voir annexe) On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec un point fixe a attractif.

- Si $\varphi'(a) > 0$, alors on a un graphe en escalier, c'est-à-dire que la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ est monotone.
- Si $\varphi'(a) < 0$, alors on a un graphe en escargot.
- Si $\varphi'(a) = 0$, on ne peut pas conclure. Mais, si φ est $\mathcal{C}^2$ et $\varphi''(a) \neq 0$, alors a est un extremum local et on trouve encore un graphe en escalier.

3 Applications en analyse numérique

3.1 Résolution de $f(x) = 0$

Théorème 31 (Méthode de la sécante). *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ tel que $f(a)f(b) < 0$ et $f', f'' > 0$ sur $[a,b]$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a,b]$, on définit alors*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$$

Alors, (x_n) est monotone et converge vers α. De plus, on a une convergence géométrique :

$$|x_n - \alpha| \leqslant (b-a)\left(\frac{b-a}{2}\frac{\sup|f''|}{\inf|f'|}\right)^n$$

Théorème 32 (Méthode de Newton). *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ tel que $f(a)f(b) < 0$ et $f', f'' > 0$ sur $[a,b]$. Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a,b]$, on définit alors*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Alors, (x_n) est monotone et converge vers α. De plus, la convergence est quadratique :

$$|x_n - \alpha| \leqslant (b-a)\left(\frac{b-a}{2}\frac{\sup|f''|}{\inf|f'|}\right)^{2^n - 1}$$

Exemple 33 : On peut avoir de très bonne approximation de $\sqrt{\alpha}$ via $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.

Remarques 34 :

- La méthode de Newton est efficace si on prend x_0 proche de α, car en général, on ne connait pas le comportement de f''.
- La méthode de Newton est bien plus efficace que la méthode de la sécante, mais son implémentation nécessite le calcul de f', ce qui peut se faire par un logiciel de calcul formel, mais n'est pas facile à adapter sinon.

3.2 Résolutions de systèmes linéaires

On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$ où $A \in GL_n(\mathbb{R})$, pour cela on construit une suite (x^k) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers la solution x.

Définition 35. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on écrit $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$, la méthode itérative associée à cette décomposition est la suite définie par $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et*

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Exemples 36 : On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in GL_n(\mathbb{R})$.

- La méthode de Jacobi est donnée par le choix de M comme la matrice diagonale où la diagonale de M est celle de A.
- La méthode de Gauss-Seidel est donnée par le choix de M comme étant le triangle inférieur de A.
- La méthode de relaxation est un raffinement de la méthode de Gauss-Seidel

Définition 37. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.*

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 38. *Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes subordonnées sur $M_n(\mathbb{C})$, alors si $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a*

$$\rho(A) = \inf_{N \in \mathcal{N}} N(A)$$

Théorème 39. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ que l'on décompose en $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$, alors la méthode itérative associée à cette décomposition converge si, et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Application 40 : Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.

Application 41 : Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Gauss-Seidel converge aussi.

Proposition 42. *Si A est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge.*

Remarque 43 : Si A est tridiagonale, alors la méthode de Jacobi converge si, et seulement si, la méthode de Gauss-Seidel converge. Et en cas de convergence, c'est la méthode de Gauss-Seidel qui converge le plus vite.

3.3 Recherche d'extrema

Définition 44. *Soit J une fonction définie sur un ensemble convexe K d'un espace de Hilbert H et à valeurs réelles, on dit que J est α-convexe si*

$$\forall u, v \in K, J\left(\frac{u+v}{2}\right) \leqslant \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{\alpha}{8}\|u-v\|^2$$

Exemple 45 : Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ est α-convexe.

Théorème 46. *Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction α-convexe, continue sur K, alors il existe un unique minimum u de J sur K et on a*

$$\forall v \in K, \|u-v\|^2 \leqslant \frac{4}{\alpha}[J(v) - J(u)]$$

Théorème 47 (Descente de gradient à pas constant)**.** *Soit $\mu > 0$, on suppose que J est α-convexe, différentiable et telle que ∇J est M-lipschitzienne. Alors, si $\mu \in \left[0, \frac{2\alpha}{M^2}\right[$, alors la suite définie par $u^{n+1} = u^n - \mu\nabla J(u^n)$ converge le minimiseur de J. De plus, on a l'estimation de la vitesse de convergence :*

$$\|u^n - u\| \leqslant \gamma^n\|u^0 - u\| \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \sqrt{1 - 2\alpha\mu + \mu^2 C^2}$$

Remarque 48 : La valeur optimale de γ est obtenue pour $\mu = \frac{\alpha}{C^2}$.

Théorème 49 (Descente de gradient à pas optimal)**.** *Soit J une fonction α-convexe qui est $\mathcal{C}^1$ sur H, alors la suite définie par*

$$u^{n+1} = u^n - \mu^n\nabla J(u^n) \qquad \text{avec} \qquad \mu^n = \inf_{\mu\in\mathbb{R}} J\big(u^n - \mu\nabla J(u^n)\big)$$

converge vers le minimiseur de J.

DEVELOPPEMENT 3

Lemme 50 (Kantorovitch)**.** *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $x \neq 0$, alors*

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2\|x\|_{A^{-1}}^2} \geqslant 4\frac{\lambda_{\max}\lambda_{\min}}{(\lambda_{\max}+\lambda_{\min})^2}$$

où $\|x\|_A^2 = x^T Ax$.

Théorème 51. *Soit $\Phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ avec $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors,*

1. *Φ atteint son minmum en un unique point $\overline{x}$.*
2. *On définit la suite $x_{k+1} = x_k - \alpha_k\nabla\Phi(x_k)$ avec $\alpha_k = \frac{\|\nabla\Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\Phi(x_k)\|_A^2}$ et $x_0 \neq \overline{x}$. Alors, (x_k) converge vers $\overline{x}$.*
3. *On a l'estimation de la vitesse de convergence :*
$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\left(\frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}+\lambda_{\min}}\right)^{k+1}\|x_0 - \overline{x}\|$$
4. *Finalement, (x_k) est soit stationnaire à partir du rang 1, soit $x_k \neq x_{k+1}$ pour tout k.*

Remarque 52 : Trouver un minimiseur de Φ revient à trouver x tel que $\nabla\Phi(x) = 0$, ie de résoudre l'équation $Ax = b$.

3.4 Résolution approchée d'équations différentielles

On s'intéresse au problème de Cauchy $(E) : \left\{\begin{array}{lcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$ que l'on souhaite résoudre numériquement.
On subdivise $[0, T]$ en $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ et on note $h_n = t_{n+1} - t_n$ et $h_{\max} = \max(h_n)$.

Définition 53. *Une méthode de résolution à un pas est une suite récurrente définie par $y_{n+1} = y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n)$ où $\Phi : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.*

- *La méthode d'Euler explicite est donnée par $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$, ie :*
$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$$
- *La méthode de Crank-Nicholson est donnée par $\Phi(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right)$, ie*
$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2}f(t_n, y_n)\right)$$

Définition 54 (Consistance). *Soit z une solution exacte de (E), on pose*

$$e_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n\Phi\big(t_n, z(t_n), h_n\big)$$

l'erreur en t_{n+1} entre la solution exacte et la solution approchée à un pas partant de la solution exacte $z(t_n)$. On dit que le schéma est consistant d'ordre p si

$$\sum_{k=0}^{N-1} |e_k| = O\big(h_{\max}^p\big)$$

Définition 55 (Stabilité). *On dit que la méthode est stable s'il existe $S > 0$ tels que pour toutes suites (y_n), $(\widetilde{y}_n)$ définies par*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_{n+1} & = & y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n) \\ \widetilde{y}_{n+1} & = & \widetilde{y}_n + h_n\Phi(t_n, \widetilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n \end{array}\right.$$

on a

$$\max_n \big|\widetilde{y}_n - y_n\big| \leqslant S\left(|\widetilde{y}_0 - y_0| + \sum_{0\leqslant n<N} |\varepsilon_n|\right)$$

Définition 56 (Convergence). *On dit que la méthode est convergente si pour toute solution exacte z, la suite $y_{n+1} = y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n)$ vérifie*

$$\max_{0\leqslant n<N} \big|y_n - z(t_n)\big| \underset{h_{\max}\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Théorème 57. *Si la méthode est stable et consistante, alors elle est convergente.*

Théorème 58 (Ordre de consistance). *La méthode d'Euler explicite est consistant d'ordre 1, tandis que la méthode de Crank-Nicholson est consistant d'ordre 2.*

Remarque 59 : En temps normal, on utilise un schéma encore meilleur appelé schéma de Runge-Kutta 4 qui est consistant d'ordre 4.

Lemme 60 (Gronwall discret). *Soit (h_n) et (θ_n) deux suites de réels positifs et (ε_n) une suite réelle telles que*

$$\theta_{n+1} \leqslant (1 + \Lambda h_n)\theta_n + |\varepsilon_n|$$

Alors,

$$\theta_n \leqslant e^{\Lambda(t_n - t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\Lambda(t_n - t_{i+1})}|\varepsilon_i|$$

Théorème 61. *Si la fonction Φ est Λ-lipschitzienne en y, alors la méthode est stable et on peut prendre comme constante de stabilité $S = e^{\Lambda T}$.*

Corollaire 62. *Les méthodes d'Euler explicite et de Crank-Nicholson sont convergentes.*

Références :

- Allaire, Analyse numérique et optimisation.
- Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.
- Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.
- Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Rombaldi, Éléments d'analyse réelle.
- Rombaldi, Analyse matricielle.