223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Pandou

4 janvier 2022

Dans toute la leçon, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Suites et convergence

1.1 Limites finies

Définition 1. *Une suite numérique est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow K$. On notera u_n l'image de n par u et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 2. *On dit que (u_n) converge s'il existe $\ell \in K$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \left|u_n - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Sinon, on dit que (u_n) diverge.

Proposition 3. *La limite ℓ est unique.*

Exemple 4 : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Proposition 5. *Toute suite convergente est bornée.*

On peut faire des opérations sur les limites.

Théorème 6. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers ℓ et ℓ' respectivement. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \ell + \lambda\ell' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell\ell'$$

Si de plus, $\ell' \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'}$$

Théorème 7 (Convergence et continuité)**.** *Soit $\ell \in \mathbb{C}$ et V un voisinage ouvert de ℓ. Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$, alors f est continue en ℓ si, et seulement si, pour toute suite (u_n) convergeant vers ℓ, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.*

Exemple 8 : Si f est continue et que (u_n) est une suite vérifiant à partir d'un certain rang $u_{n+1} = f(u_n)$, alors la limite éventuelle de (u_n) est un point fixe de f.

Proposition 9 (Ordre et passage à la limite)**.** *Soit (u_n) une suite réelle convergente vers ℓ. Si à partir d'un certain rang, on a $u_n \in [a,b]$, alors $\ell \in [a,b]$.*

Théorème 10 (Encadrement)**.** *Soit (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$. On suppose que (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ.*
Alors, (u_n) est convergente et de limite ℓ.

Théorème 11 (Borne supérieure)**.** *Toute suite (réelle) croissante majorée converge.*

1.2 Valeurs d'adhérence

Définition 12. *Une suite extraite de (u_n) est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où φ est une fonction $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui tend vers $+\infty$.*
Une valeur d'adhérence de (u_n) est la limite d'une de ses sous-suites.

Exemple 13 : $(-1)^n$ possède deux valeurs d'adhérence : 1 et -1.

Proposition 14. *Si (u_n) est convergente vers ℓ, alors (u_n) a une unique valeur d'adhérence qui est ℓ. Plus précisément, toutes les sous-suites de (u_n) convergent aussi vers ℓ.*

Remarque 15 : La réciproque est fausse : la suite définie par $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$ a pour valeur d'adhérence 0, mais n'est pas convergente car non bornée.
La contraposée par contre sert à justifier qu'une suite diverge : par exemple $(-1)^n$ diverge car a deux valeurs d'adhérence.

Proposition 16. *L'ensemble des valeurs d'adhérence $\mathcal{A}$ de (u_n) est égal à $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geqslant p\}}$. En particulier, $\mathcal{A}$ est toujours fermé.*

Remarque 17 : Réciproquement, tout fermé non vide de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points d'adhérence d'une suite.

Théorème 18 (Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite réelle (ou complexe) bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Théorème 19. *Toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence converge.*

Définition 20. *Une suite (u_n) est dite de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$

Théorème 21. *Toute suite réelle (ou complexe) de Cauchy converge.*

1.3 Limites infinies

Définition 22. *On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ si*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$$

(u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$.

Proposition 23 (Comparaison)**.** *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$. Alors, si $u_n \longrightarrow +\infty$, alors $v_n \longrightarrow +\infty$.*

Proposition 24 (Opérations)**.** *Les opérations faisables entre limites finies et infinies sont résumées dans un tableau en annexe.*

Proposition 25 (Borne supérieure)**.** *Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*

2 Cas des suites récurrentes

Définition 26. *Une suite (u_n) est récurrente d'ordre p s'il existe une fonction $f : K^p \longrightarrow K$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = f(u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+p-1})$$

2.1 Cas particuliers

Définition 27. *Une suite est arithmétique si elle est de la forme*

$$u_{n+1} = u_n + a$$

avec $a \in K$, qui est alors appelée raison de (u_n).

Proposition 28. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison a, alors*

$$\forall n, u_n = u_0 + na$$

En particulier, (u_n) diverge toujours sauf si $a = 0$.

Définition 29. *Une suite est géométrique si elle est de la forme*

$$u_{n+1} = qu_n$$

avec $q \in K$, qui est alors appelée raison de (u_n).

Proposition 30. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors*

$$\forall n, u_n = u_0 \times q^n$$

En particulier,
- *Si $|q| > 1$, alors (u_n) diverge.*
- *Si $|q| < 1$, alors (u_n) converge vers 0.*
- *Si $|q| = 1$, tout peut se produire.*

Définition 31. *Une suite est arithmético-géométrique si elle est de la forme*

$$u_{n+1} = au_n + b \qquad \text{avec} \qquad a \neq 1 \text{ et } b \neq 0$$

On appellera (a, b) les paramètres de cette suite.

Proposition 32. *Soit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$, alors $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a et donc,*

$$\forall n, u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$$

Définition 33. *Une suite est récurrente homographique si elle est de la forme*

$$u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{avec} \qquad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ avec } ad - bc \neq 0$$

Proposition 34. *Soit (u_n) une suite récurrente homographique, d'homographie h. Alors,*

- *Si h a deux points fixes α, β, alors* $\left(\dfrac{u_n-\alpha}{v_n-\beta}\right)$ *est une suite géométrique.*
- *Si h a un seul point fixe α, alors* $\left(\dfrac{1}{u_n-\alpha}\right)$ *est une suite arithmétique.*

Définition 35. *Une suite vérifie une récurrence linéaire homogène d'ordre p à coefficients constants si*

$$u_{n+p} = a_0u_n + a_1u_{n+1} + \dots + a_{p-1}u_{n+p-1}$$

Théorème 36. *Le polynôme $X^p - a_0X^{p-1} - \dots - a_{p-1}$ est appelé polynôme caractéristique de la récurrence. On note $r_1, \dots, r_q$ ses racines et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ leur ordre de multiplicités respectifs.*
Alors, il existe des polynômes $P_1, \dots, P_q$ tels que $\deg(P_i) < \alpha_i$ tels que

$$\forall n, u_n = P_1(n)r_1^n + \dots + P_q(n)r_q^n$$

2.2 Cas général

Proposition 37. *Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction et (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.*

- *Si f est croissante, alors (u_n) est monotone.*
- *Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens opposé.*

Théorème 38 (du point fixe)**.** *Soit $f : I \longrightarrow I$ une application k-contractante, alors f admet un unique point fixe α et toute suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.*

Remarque 39 : On a en plus l'estimation de la vitesse de convergence : $u_n - \alpha = O(k^n)$. Plus précisément, si $f'(\alpha) \neq 0$, alors il existe une constante C telle que $u_n = \alpha + cf'(\alpha)^n + o\big(f'(\alpha)^n\big)$.

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 40. *Soit K un compact et $f : K \longrightarrow K$ une application strictement contractante, ie*

$$\forall x \neq y, \big|f(x) - f(y)\big| < |x-y|$$

Alors, f admet un unique point fixe α et toute suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.

Remarque 41 : La convergence peut être beaucoup plus lente. Par exemple si $r > 1$, $a_r = \left(\dfrac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}}$ et $f_r : x \in [0, a_r] \longmapsto x - x^r \in [0, a_r]$, alors $u_n \sim \dfrac{1}{\big((r-1)n\big)^{\frac{1}{r-1}}}$.
Ou même encore mieux, si $f : x \in [0,1] \longmapsto x - x^2e^{-\frac{1}{x}} \in [0,1]$ avec le prolongement naturel en 0, alors $u_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$.

3 Vitesse de convergence et accélération

3.1 Vitesse de convergence

Définition 42. *Soit (x_n) une suite convergente vers ℓ. On suppose que $\left(\left|\dfrac{x_{n+1}-\ell}{x_n-\ell}\right|\right)_n$ converge vers une limite λ. On dit que la vitesse de convergence de (x_n) vers ℓ est :*

1. *lente si $\lambda = 1$.*
2. *géométrique de rapport λ si $\lambda \in]0,1[$.*
3. *rapide si $\lambda = 0$.*

Remarque 43 : On a nécessairement $\lambda \in [0,1]$, en effet si $\lambda > 1$, alors la suite (x_n) diverge.

Exemples 44 :

- La convergence de $(x_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ vers e est lente.
- La convergence de (x_{2^n}) vers e est géométrique (de rapport $\dfrac{1}{2}$).
- La convergence de $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_n$ vers e est rapide.

Proposition 45. *Si on a un développement asymptotique $x_n = \ell + \kappa\lambda^n + o(\lambda^n)$ avec $\kappa \neq 0$ et $|\lambda| < 1$, alors (x_n) converge vers ℓ géométriquement de rapport $|\lambda|$.*

Corollaire 46 (Première accélération de convergence)**.** *Si $x_n = \ell + \dfrac{\kappa}{n^p} + o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$, alors (x_n) converge vers ℓ lentement. En revanche, si $k \in \mathbb{N}^*$, alors la sous-suite $(x_{k^n})_n$ converge géométriquement de rapport $\dfrac{1}{k^p}$.*

Définition 47. *Soit $r \geqslant 2$ un entier. On dit que la convergence de (x_n) vers ℓ est d'ordre r si la suite $\left(\dfrac{|x_{n+1} - \ell|}{|x_n - \ell|^r}\right)_n$ converge vers une limite non nulle.*

Exemple 48 : Une convergence lente ou géométrique est d'ordre 1, mais une convergence rapide n'est pas forcément d'ordre $\geqslant 2$.

3.2 Accélération de convergence

Définition 49. *Si (x_n) et (y_n) sont deux suites qui convergent vers ℓ. On dit que (y_n) converge plus vite versℓ que (x_n) si $y_n - \ell = o(x_n - \ell)$.*

DEVELOPPEMENT 2

Proposition 50 (Accélération d'Aitken)**.** *On note Δ l'opérateur $(x_n) \longmapsto (x_{n+1} - x_n)$. On suppose que $x_{n+1} \neq x_n$ et que (x_n) converge vers ℓ (à vitesse géométrique de rapport $|\lambda|$), alors la suite définie par $y_{n+1} = x_n - \dfrac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$ converge plus rapidement vers ℓ que (x_n).*

Lemme 51. *La suite (λ_n) définie par $\lambda_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}$ converge vers λ. De plus, on a $y_n = \dfrac{x_{n+1} - \lambda_n x_n}{1 - \lambda_n}$.*

Remarque 52 : Si $x_{n+1} = f(x_n)$, alors, on a

$$y_n = x_n + \frac{1}{g(x_n) - g(x_{n-1})} \qquad \text{avec} \qquad g(x) = \frac{1}{f(x) - x}$$

Remarque 53 : On peut en fait itérer la méthode d'Aitken pour accélérer encore plus la convergence via l'algorithme suivant :

- Calculer les deux premières itérées x_1, x_2. En déduire le premier terme de l'accélération d'Aitken : ${x^1}_0$.
- Calculer les deux premières itérées en partant de ${x^1}_0$: ${x^1}_1$ et ${x^1}_2$. En déduire le premier de l'accélération d'Aitken : ${x^2}_0$.
- Répéter le processus.

La suite $\left({x^k}_0\right)_k$ converge rapidement. C'est la méthode de Stefensen.

Références :

- Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.
- Gourdon, Analyse.
- Rombaldi, Éléments d'analyse réelle.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.