

1 Équations différentielles linéaires

1.1 Généralités

Définition 1. Une équation différentielle linéaire d'ordre p est une équation différentielle du type

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t)$$

où $A_{p-1}, \dots, A_0 : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions continues. Lorsque $B = 0$, on parle d'équation homogène.

Remarque 2 : Toute équation différentielle linéaire d'ordre p ou tout système différentiel linéaire peut se mettre sous la forme $Y' = A(t)Y + B(t)$.

Exemple 3 : $y'' = -\omega^2 y$ s'écrit $Y' = \Omega Y$ où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ a $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 4 (Cauchy-Lipschitz linéaire). Soit $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues, alors pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale de $\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$. De plus, cette solution maximale est globale, ie définie sur I tout entier.

Théorème 5 (Structure des solutions). Soit $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue. L'ensemble des solutions maximales de $Y' = A(t)Y$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de dimension n .

Corollaire 6. Soit $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues. L'ensemble des solutions maximales de $Y' = A(t)Y + B(t)$ est un espace affine de dimension n , dirigée par l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée.

1.2 Équations à coefficients constants

Théorème 7. On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors l'unique solution de $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ est donnée par

$$Y : t \mapsto e^{(t-t_0)A}Y_0$$

Remarque 8 : Le calcul de l'exponentielle de matrices se fait facilement grâce à la décomposition de Dunford dans $\mathbb{C}$. On en déduit les solutions complexes φ et il suffit de prendre $\varphi + \bar{\varphi}$ pour obtenir les solutions réelles.

Corollaire 9. On considère l'équation $y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \dots + a_p y = 0$. On considère le polynôme $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p$, on note $r_1, \dots, r_q$ ses racines de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_q$. Alors, il existe des polynômes P_i de degré $< m_i$ tels que

$$y(t) = \sum_{i=1}^q e^{r_i t} P_i(t)$$

Exemple 10 : On considère $y'' + ay' + by = 0$.

- Si r_1 et r_2 sont les deux racines de $X^2 + aX + b$, alors les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.
- Si r est l'unique racine double de $X^2 + aX + b$, alors les solutions sont de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}$.

1.3 Équations à coefficients variables

Définition 11. On considère $V_1, \dots, V_n$ des solutions de $Y' = A(t)Y$, on définit leur wronskien par $w : t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$.

Proposition 12.

$$w'(t) = \text{Tr}(A(t))w(t)$$

Corollaire 13 (Libre un jour, libre toujours). Soit $V_1, \dots, V_n$ des solutions de $Y' = A(t)Y$, on a équivalence entre :

1. $(V_1, \dots, V_n)$ est un système fondamental de solutions.
2. Il existe $t \in I$ tel que $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
3. Pour tout $t \in I$, $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Méthode 14 : (Variation des constantes) Supposons que l'on connaisse un système fondamental de solutions de $Y' = A(t)Y$. Alors, les solutions de l'équation $Y' = A(t)Y + B(t)$ se trouvent par variation des constantes, ie sous la forme $V : t \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)V_i(t)$. Ce qui donne le système de Cramer

$$\sum_{i=1}^n \lambda'_i(t)V_i(t) = B(t)$$

Exemple 15 : Pour une équation de la forme $y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$, si u et v forment une base de l'ensemble des solutions de $y'' = a(t)y' + b(t)y$, alors la variation des constantes donne une solution particulière de la forme $\lambda u + \mu v$ avec

$$\begin{cases} \lambda' u + \mu' v &= 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' &= c(t) \end{cases}$$

2 Espaces de Hilbert

2.1 Généralités

Définition 16. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme euclidienne associée. Dans la suite, H est un espace de Hilbert.

Exemples 17 :

- Tout espace préhilbertien de dimension finie est un Hilbert.
- L^2 est un espace de Hilbert (théorème de Riesz-Fischer) muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int uv.$$

Proposition 18.

$$\forall u, v \in H, |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Théorème 19 (Projection sur un convexe fermé). Soit C un convexe fermé non vide de H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe une unique $a \in C$ tel que

$$\|a - x\| = d(a, C)$$

De plus, a est caractérisé par

$$a \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \langle x - a, y - a \rangle \leq 0$$

On note $a = p_C(x)$ la projection sur x .

Proposition 20. p_C est une application 1-lipschitzienne. De plus, si C est un sous-espace fermé, alors p_C est un opérateur linéaire continu.

Théorème 21. Soit F un sous-espace fermé de H , alors

$$H = F \oplus F^\perp \quad \text{et} \quad F^{\perp\perp} = F$$

Corollaire 22. Soit F un sous-espace quelconque de H , alors

$$H = \overline{F} \oplus F^\perp$$

En particulier, F est dense dans H si, et seulement si, $F^\perp = 0$.

2.2 Théorèmes de représentation

Théorème 23. Soit H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H . L'application

$$a \in H \mapsto (x \mapsto \langle a, x \rangle) \in H'$$

est une isométrie surjective.

Application 24 : Soit u un endomorphisme continu de H , alors il existe un unique opérateur continu v de H , appelé adjoint de u , tel que

$$\forall x, y \in H, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

On note $v = u^*$.

Définition 25. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur H . On dit que a est coercive s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in H, a(x, x) \geq C \|x\|^2$$

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 26. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors, il existe un opérateur linéaire continu T sur H tel que

$$\forall x, y \in H, a(x, y) = \langle Tx, y \rangle$$

Corollaire 27 (Théorème de Lax-Milgram). Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive et L une forme linéaire continue sur H , alors il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall y \in H, a(u, y) = L(y)$$

De plus, si a est symétrique, on note $E(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - L(x)$, alors u est caractérisé par

$$E(u) = \min_{x \in H} E(x)$$

2.3 Espaces de Sobolev en dimension 1

On fixe I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 28. Soit $u \in L^2(I)$, on dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(I)$ s'il existe $w \in L^2(I)$ telle que

$$\int_I vw' = - \int_I v'w$$

On note alors $w = u'$.

Lemme 29. Soit $u \in L^2(I)$, on suppose qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(I), \left| \int_I v\varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(I)}$$

alors, u est dérivable dans $L^2(I)$.

Définition 30. On définit l'espace de Sobolev $H^1(I)$ par

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I), u' \in L^2(I)\}$$

Proposition 31. Muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_I (uv + u'v')$, $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 32. On a une injection continue $H^1(I) \hookrightarrow C^{\frac{1}{2}}(\bar{I})$, où $C^{\frac{1}{2}}$ est l'espace des fonctions $\frac{1}{2}$ -hölériennes, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x>y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{\sqrt{x - y}} \right|$.

Définition 33. On définit $H_0^1(I)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(I)$ pour la norme H^1 .

Proposition 34. $H_0^1(I)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 35.

$$H_0^1(I) = \{u \in H^1(I), u|_{\partial I} = 0\}$$

Proposition 36 (Inégalité de Poincaré). On suppose que I est borné, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|u'\|_{L^2}$$

Corollaire 37. Sur $H_0^1(I)$, $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ est une norme équivalence à la norme H^1 .

Théorème 38 (Rellich). On suppose que I est borné, alors l'injection canonique $H^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ est compacte. C'est-à-dire, de toute suite bornée de $H^1(I)$, on peut en extraire une sous-suite convergente dans $L^2(I)$.

2.4 Éléments de théorie spectrale

Définition 39. Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur, on dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A s'il existe $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$.

Définition 40. On dit qu'un opérateur $A : H \rightarrow H$ est compact si l'image de la boule unité par A est relativement compacte.

Lemme 41. Soit V un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint compact de V dans V , on pose

$$m = \inf_{u \neq 0} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \quad \text{et} \quad M = \sup_{u \neq 0} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle}$$

Alors, $\|A\| = \max(|m|, |M|)$ et alors m ou M est valeur propre de A .

Lemme 42. Soit V un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire compact de V dans V . Pour tout réel $\delta > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs propres dans $\mathbb{R} \setminus]-\delta, \delta[$ et le sous-espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres est de dimension finie.

Théorème 43. Soit V un espace de Hilbert de dimension infinie et A un opérateur définie positif, auto-adjoint et compact de V dans V . Alors, les valeurs propres de A forment une suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels strictement positifs qui tend vers 0 et il existe une base hilbertienne $(u_k)_{k \geq 1}$ de vecteurs propres de A tels que

$$Au_k = \lambda_k u_k$$

Théorème 44. Soit V et H deux espaces de Hilbert. On suppose que l'injection $V \hookrightarrow H$ est compacte et que V est dense dans H . Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur V .

Il existe un unique opérateur linéaire A auto-adjoint, compact et défini positif tel que

$$\forall f \in H, \forall v \in V, a(Af, v) = \langle f, v \rangle_H$$

Corollaire 45. En reprenant les notations du théorème, il existe une suite croissante (λ_k) de réels positifs qui tend vers $+\infty$ et une base hilbertienne (u_k) de vecteurs tels que

$$u_k \in V \quad \text{et} \quad \forall v \in V, a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v \rangle_H$$

De plus, $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k \right)_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire a .

3 Quelques EDP linéaires

3.1 Étude du laplacien

Définition 46 (Laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes). On s'intéresse au problème aux limites $\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases}$. Une solution faible est un élément $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(]0, 1[), \int_I u'v' = \int_I fv$$

Proposition 47. *Toute solution classique est une solution faible.*

Théorème 48. *Si $f \in L^2$, alors ce problème admet une unique solution faible. De plus, si f est continue sur $[0, 1]$, alors u est une solution forte.*

Proposition 49. *L'application qui à $f \in L^2(]0, 1[)$ associe l'unique solution $u \in H_0^1(]0, 1[)$ est linéaire et continue de L^2 dans H^1 .*

Remarque 50 : Si on impose $u(0) = a$ et $u(1) = b$, on considère u_0 une fonction régulière telle que $u_0(0) = a$ et $u_0(1) = b$, alors $\tilde{u} = u - u_0$ vérifie les conditions de Dirichlet homogènes.

Définition 51 (Laplacien avec conditions de Neumann). *On s'intéresse au problème aux limites*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ sur }]0, 1[\\ u'(0) &= a \\ u'(1) &= b \end{cases} . \text{ Une solution faible est un élément } u \in H^1(]0, 1[) \text{ tel que}$$

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \int_I u'v' = \int_I fv - av(0) + bv(1)$$

Proposition 52. *Toute solution classique est une solution faible.*

Théorème 53. *Si $f \in L^2$, ce problème admet une unique solution faible. De plus, si f est continue, alors u est solution forte.*

Définition 54 (Problème de Sturm-Liouville). *On s'intéresse au problème aux limites*

$$\begin{cases} -(pu')' + qu &= f \text{ sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases} . \text{ Une solution faible est un élément } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que}$$

$$\forall v \in H_0^1(]0, 1[), \int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv$$

Proposition 55. *Toute solution classique est une solution faible.*

Théorème 56. *Si $f \in L^2$ et $0 < p_- < p < p_+$ et $q \geq 0$, alors ce problème admet une unique solution faible.*

3.2 Équation de la chaleur

Définition 57. *Soit $I =]0, 1[$, on s'intéresse à l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{x,x}^2 u &= f \text{ sur } I \times]0, +\infty[\\ u(t, 0) = u(t, 1) &= 0; \text{ sur }]0, +\infty[\\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ sur } I \end{cases}$$

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 58 (Cas régulier). *Soit $f \in C^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Alors, il existe une unique solution $u \in C^2([0, \pi] \times]0, +\infty[) \cap C^0([0, \pi], [0, +\infty[)$ à l'équation de la chaleur sur $]0, \pi[$.*

Théorème 59 (Cas général). *Soit $V \subset H$ deux espaces de Hilbert avec V dense dans H et tels que $V \hookrightarrow H$ est compacte. Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive.*

Soit $T > 0$, $u_0 \in H$ et $f \in L^2(]0, T[, H)$. Alors, le problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_H + a(u(t), v) &= \langle f(t), v \rangle_H \quad \forall v \in V, t \in]0, T[\\ u(t=0) &= u_0 \end{cases}$$

a une unique solution faible $u \in L^2(]0, T[; V) \cap C^0([0, T]; H)$. De plus, il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^2(]0, T[; V)} + \|u\|_{C^0([0, T]; H)} \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(]0, T[; H)})$$

Application 60 : On suppose que $u_0 \in L^2(I)$ et $f \in L^2(]0, T[; L^2(I))$. Alors, l'équation de la chaleur admet une unique solution $u \in L^2(]0, T[; H_0^1(I)) \cap C^0([0, T]; L^2(I))$. Cette solution est de la forme

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\alpha_j e^{-\lambda_j t} + \int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \right) u_j$$

Proposition 61. *On suppose que $u_0 \in L^2(I)$ et $f = 0$, alors la solution de l'équation de la chaleur $u \in L^2(]0, +\infty[; H_0^1(I))$ vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{L^2} = 0$$

Application 62 : Si $f \neq 0$ dans L^2 , soit $v \in H_0^1(I)$ la solution de

$$\begin{cases} -v'' &= f \\ v(0) = v(1) &= 0 \end{cases} , \text{ alors on a}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - v(x)\|_{L^2} = 0$$

Théorème 63 (Effet régularisant (admis)). *On suppose que $f = 0$ et que $u_0 \in L^2(I)$. Soit u l'unique solution de l'équation de la chaleur dans $L^2(]0, T[; H_0^1(I)) \cap C^0([0, T]; L^2(I))$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $u \in C^\infty([0, 1] \times [\varepsilon, T])$.*

3.3 Équation des ondes

Définition 64. *Soit $I =]0, 1[$, on s'intéresse à l'équation des ondes*

$$\begin{cases} \partial_{t,t}^2 u - \partial_{x,x}^2 u &= f \text{ sur } I \times]0, +\infty[\\ u(t, 0) = u(t, 1) &= 0; \text{ sur }]0, +\infty[\\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ sur } I \\ \partial_t u(t=0) &= u_1(x) \text{ sur } I \end{cases}$$

Théorème 65 (Cas général). Soit V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \hookrightarrow H$ est compact et V dense dans H . Soit $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur V .

Soit $T > 0$, $(u_0, u_1) \in V \times H$ et $f \in L^2(]0, T[; H)$, alors le problème

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), v \rangle_H + a(u(t), v) &= \langle f(t), v \rangle \forall v \in V, t \in]0, T[\\ u(t=0) &= u_0 \\ \partial_t u(t=0) &= u_1 \end{cases}$$

a une unique solution $u \in \mathcal{C}^0([0, T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; V)} + \|u\|_{\mathcal{C}^1([0, T]; H)} \leq C(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H + \|f\|_{L^2(]0, T[; H)})$$

Application 66 : On suppose que $u_0 \in H_0^1(I)$, $u_1 \in L^2(I)$ et $f \in L^2(]0, T[; L^2(I))$, alors l'équation des ondes admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_0^1(I)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(I))$. cette solution est de la forme

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\alpha_j \cos(\omega_j t) + \frac{\beta_j}{\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \gamma_j(s) \sin(\omega_j(t-s)) ds \right) u_j$$

Proposition 67 (Réversibilité en temps). On suppose que $(v_0, v_1) \in H_0^1(I) \times L^2(I)$ et $f \in L^2(]0, T[; L^2(I))$. On considère l'équation des ondes "rétrograde", ie avec les conditions initiales $v(x, T) = v_0(x)$ et $\partial_t v(x, T) = v_1(x)$.

Alors, cette équation a une unique solution $v \in \mathcal{C}^0([0, T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H)$.

Si u est l'unique solution de l'équation des ondes classique, et si $v_0 = u(t=T)$ dans $H_0^1(I)$ et $v_1 = \partial_t u(t=T)$ dans $L^2(I)$, alors $u = v$.

Références :

- Allaire, Analyse numérique et optimisation.
- Brézis, Analyse fonctionnelle.
- Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.