220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Pandou

1 juin 2022

1 Équations différentielles ordinaires

1.1 Solutions maximales et globales

Définition 1. *Soit $f : U = J \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue où J est un intervalle de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = f(t,y)$.*
Une solution de cette équation est un couple (I,y) où $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable et I un intervalle ouvert tel que
1. $\forall t \in I, \big(t, y(t)\big) \in U$.
2. $\forall t \in I, y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$.

Une équation de la forme $y' = f(t,y)$ est appelée une équation différentielle ordinaire.

Remarque 2 : Si on écrit $y = (y_1, ..., y_m)$ et $f = (f_1, ..., f_m)$, l'équation précédente devient un système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & f_1\big(t, y_1(t), ..., y_m(t)\big) \\ & \vdots & \\ y_m'(t) & = & f_m\big(t, y_1(t), ..., y_m(t)\big) \end{array} \right.$$

Réciproquement, tout système différentiel de cette forme se ramène à une équation différentielle $y' = f(t,y)$.

Définition 3. *On considère (I_1, y_1) et (I_2, y_2) deux solutions de (E). On dit que (I_2, y_2) est un prolongement de (I_1, y_1) si $I_1 \subset I_2$ et $y_{2|I_1} = y_1$.*
On dit qu'une solution (I,y) est maximale si elle n'admet aucun prolongement strict.

Théorème 4. *Toute solution se prolonge en une solution maximale (non nécessiarement unique).*

Exemple 5 : L'équation différentielle $y' = \sqrt{|y|}$, une solution sur $]-\infty, 0[$ est la solution nulle que l'on peut prolonger à $\mathbb{R}$ de deux façons :
- Par la fonction nulle.
- Par $x \longmapsto \dfrac{x^2}{4}$.

Définition 6. *Une solution globale de (E) est une solution définie sur l'intervalle J entier.*

Proposition 7. *Toute solution globale est maximale.*

Remarque 8 : La réciproque est fausse. Par exemple, l'équation $y' = y^2$ a des solutions maximales qui ne sont pas globales.

1.2 Existence et unicité

Définition 9. *Soit $(t_0, y_0) \in U$, un problème de Cauchy passant par (E) est une solution de l'équation (E) telle que $y(t_0) = y_0$.*

Théorème 10 (Cauchy-Arzela)**.** *Il existe au moins une solution définie au voisinage de t_0 au problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$.*
En particulier, il existe toujours au moins une solution maximale de ce problème de Cauchy et l'intervalle de définition est toujours ouvert.

Remarque 11 : L'exemple 5 donne un exemple de non unicité d'une solution maximale.

Lemme 12 (Gronwall)**.** *Soit f, g deux fonctions continues et positives et $C > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \geqslant t_0, f(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)\mathrm{d}s$. Alors,*

$$\forall t \geqslant t_0, f(t) \leqslant C \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}s \right)$$

Définition 13. *On dit que $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si pour tout $(t_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et $k > 0$ tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, (t,x), (t,x') \in V \Longrightarrow \big\| f(t,x) - F(t,x') \big\| \leqslant k \|x - x'\|$$

Proposition 14. *Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$, alors elle est localement lipschitzienne, en particulier par rapport à la deuxième variable.*

Théorème 15 (Cauchy-Lipschitz)**.** *On suppose que f est localement lipschitzienne en la seconde variable et on fixe $(t_0, y_0) \in U$. Alors, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$.*

Remarque 16 : L'exemple 5 montre que sans l'hypothèse localement lipschitzienne, on n'a plus unicité.

Interprétation 17 : Les graphes des solutions maximales sont appelées courbes intégrales. Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que les courbes intégrales forment une partition de U. En particulier, deux courbes intégrales ne se coupent jamais.

1.3 Critère de maximalité et de globalité

Théorème 18 (Sortie de tout compact)**.** *Une solution $y :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^m$ de (E) est maximale si, et seulement si, $t \longmapsto \big(t, y(t)\big)$ sort de tout compact de U quand $t \longrightarrow a^+$ et quand $t \longrightarrow b^-$.*

Corollaire 19. *On suppose que f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ tout entier. Si f est bornée sur tout $[a,b] \times \mathbb{R}^m$, alors toute solution maximale de (E) est globale.*

Exemple 20 : Les solutions maximales de $y' = t\sin(y)$ sont globales.

Théorème 21. *On fait l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :*

1. *f **est "continûment lipschitzienne".** Il existe une fonction $k : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que la fonction $y \longmapsto f(t,y)$ soit $k(t)$-lipschitzienne.*
2. *f **croît sous-linéairement.** Il existe des fonctions continues $c, k : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que $\|f(t,y)\| \leqslant c(t) + k(t)\|y\|$.*

Alors, toute solution maximale de (E) est globale.

Application 22 :
- Toute solution d'une équation différentielle linéaire est globale.
- Toute solution maximale de $y' = t\sqrt{t^2+y^2}$ est globale.

2 Exemples de résolutions

2.1 Équations différentielles linéaires à coefficiens constants

Théorème 23. *La solution maximale du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{rcl} Y' & = & AY \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array}\right.$ est $t \longmapsto e^{(t-t_0)A}Y_0$.*

Remarque 24 : Le calcul des exponentielles de matrices peut se faire facilement grâce à la décomposition de Dunford.

Proposition 25. *On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre p à coefficients constants $y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + ... + a_0 y = 0$. On note $r_1, ..., r_q$ les racines de $X^p + a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_0$ et $\alpha_1, ..., \alpha_q$ leur multiplicité.*
Il existe des polynômes P_i de degré $< \alpha_i$ tels que

$$y(t) = \sum_{i=1}^{q} e^{r_i t} P_i(t)$$

Exemple 26 : Si $y'' + ay' + by = 0$.
- Si r_1 et r_2 sont les racines de $X^2 + aX + b$, alors $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.
- Si r est l'unique racine double de $X^2 + aX + b$, alors $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$.

2.2 Équations à variables séparées

Définition 27. *Une équation autonome est une équation de la forme $y' = f(y)$.*

Proposition 28. *Si f ne s'annule pas, alors il existe une unique solution de $y' = f(y)$ et elle est donnée par $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & f(y) \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right.$ est donnée par l'application φ telle que $\varphi^{-1}(x) = \displaystyle\int_{y_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$.*

Remarque 29 : Lorsque f s'annule, il suffit de résoudre l'équation sur chaque composante connexe de $\{x, f(x) \neq 0\}$ et étudier les raccords.
Les raccords peuvent créer de nouvelles solutions si f est seulement supposée continue.

Remarque 30 : Une méthode similaire permet de résoudre de même les équations à variables séparées, ie de la forme $y' = f(t)g(y)$. Si g ne s'annule pas, les solutions sont données par

$$y = G^{-1}\big(F(x) + \lambda\big)$$

où G une primitive de $\dfrac{1}{g}$ et F une primitive de f.

2.3 Quelques méthode de résolutions

Méthode 31 : (Variation des constantes) Supposons connaître un système fondamental de solutions de l'equation $Y' = A(t)Y$, disons $(V_1, ..., V_n)$. On cherche à résoudre l'équation $Y' = A(t)Y + b(t)$ en cherchant les solutions sous la forme $V(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)V_i(t)$.
Il reste alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)V_i(t) = b(t)$$

On peut résoudre ce système ensuite.

Exemple 32 : (Variation des constantes pour l'ordre 2) Soit (u,v) deux solutions indépendantes de $y''=a(t)y'+b(t)y$. On cherche une solution de $y''=a(t)y'+b(t)y'+c(t)$. La méthode de variation de la constante amène au système

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda'u+\mu'v & = & 0\\ \lambda'u'+\mu'v' & = & c(t)\end{array}\right.$$

Méthode 33 : (Équations de Bernoulli) On s'intéresse aux équations $y'=a(t)y+b(t)y^{\alpha}$ avec $\alpha\neq 1$. Le changement de variables $z=y^{1-\alpha}$ nous ramène à une équation linéaire d'ordre 1 :

$$\frac{1}{1-\alpha}z'=a(t)z+b(t)$$

Méthode 34 : (Équations de Ricatti) On s'intéresse aux équations $y'=a(t)y^2+b(t)y+c(t)$. Si φ_0 est une solution particulière, alors en notant $y=\varphi_0+z$, y est solution de (R) si, et seulement si, z est solution d'une équation de Bernoulli.
Cette équation apparemment quand on étudie des problèmes de mécanique.

Exemple 35 : On considère $(R) : (1-x^3)y'+x^2y+y^2-2x=0$. Alors x^2 est solution particulière, on pose donc $y=x^2+z$ et on en déduit que $(1-x^3)z'+3x^2z+z^2=0$. En posant $w=\dfrac{1}{z}$ pour résoudre l'équation de Bernoulli, on trouve finalement que

$$-(1-x^3)w'+3x^2w+1=0$$

Par variation de la constante, on trouve finalement que $w(x)=\dfrac{x+\lambda}{1-x^3}$ et donc

$$y(x)=\frac{\lambda x^2+1}{x+\lambda}$$

Méthode 36 : (Équations homogènes) On cherche à résoudre $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. On pose $z=\dfrac{y}{x}$ et on obtient une équation à variables séparées

$$z'=\frac{f(z)-z}{x}$$

Exemple 37 : On considère $(H) : xy'(2y-x)=y^2$ qui se réécrit $y'=\dfrac{z^2}{z-1}$ avec $z=\dfrac{y}{x}$.
On a les solutions évidentes $z=0$ et $z=1$ qui donnent $y=0$ et $y=x$.
D'autre part, en séparant les variables, on trouve $z(1-z)=\dfrac{\lambda}{x}$ ce qui donne les courbes intégrales qui sont des coniques d'équations

$$(y-\lambda)(x-y-\lambda)=\lambda^2$$

donc des branches d'hyperbole.

Méthode 38 : (Série entière) Pour une équation différentielle (souvent linéaire), on peut chercher les solutions développables en série entière $\sum a_nx^n$. L'équation différentielle donne une suite récurrente linéaire sur (a_n), ce qui permet de les déterminer. Réciproquement, il s'agit de vérifier que la série entière $\sum a_nx^n$ est de rayon non nul.

Exemple 39 : L'ensemble des solutions développables en série entière de l'équation $xy''+y'+xy=0$ est une droite vectorielle engendrée par $J(x)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n(n!)^2}$.
Il existe une solution de (E) non bornée au voisinage de 0.

3 Étude qualitative

3.1 Équations différentielles linéaires

Théorème 40. *Soit $A,b : I\longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ une application continue. L'ensemble des solutions maximales de l'équation $Y'=A(t)Y+b(t)$ est un espace affine de dimension n.*
Il est dirigé par l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée $Y'=A(t)Y$.

Définition 41. *Soit $V_1,\dots,V_n$ des solutions de $Y'=A(t)Y$, leur wronskien est la fonction $w : t\longmapsto \det\big(V_1(t),\dots,V_n(t)\big)$.*

Proposition 42.

$$w'(t)=\mathrm{Tr}\big(A(t)\big)w(t)$$

Corollaire 43 (Libre un jour, libre toujours)**.** *On considère l'équation $Y'=A(t)Y$ et $V_1,\dots,V_n$ des solutions. On a équivalence entre :*

1. *$(V_1,\dots,V_n)$ est un système fondamental de solutions.*
2. *Il existe t tel que $\big(V_1(t),\dots,V_n(t)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Pour tout t, $\big(V_1(t),\dots,V_n(t)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 44 : Ce résultat justifie qu'on obtient un système de Cramer à l'issue de la méthode de variation des constantes.

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 45. *Soit $A : \mathbb{R}\longrightarrow M_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :*

1. *Il existe $S\in\mathcal{C}^1\big(\mathbb{R},GL_n(\mathbb{R})\big)$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}, S(t)^{-1}A(t)S(t)=A(0)$.*
2. *Il existe $H\in\mathcal{C}^0\big(\mathbb{R},M_n(\mathbb{R})\big)$ tel que $A'(t)=\big[H(t),A(t)\big]$.*

Un tel couple (A,H) est appelé une paire de Lax.

Remarque 46 :
- Si les $\mathrm{Tr}(A^k)$ ne sont pas constantes, elles définissent des intégrales premières du mouvement.
- En mécanique classique, l'oscillateur harmonique $m\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ se reformule en termes de paires de Lax via
$$H = \begin{pmatrix} p & m\omega x \\ m\omega x & -p \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega/2 \\ \omega/2 & 0 \end{pmatrix}$$
où ω est l'impulsion, p l'impulsion et x la position d'une particule de masse m.
- En mécanique classique, l'équation de Schrödinger pour une observable A s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{\hbar}\big[H, A(t)\big]$, où H est hamiltonien.

3.2 Stabilité et linéarisation

Définition 47. *On considère un problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$ *, on suppose que la solution de ce problème existe sur* $[t_0, +\infty[$.
On note $y(t; z)$ *la solution maximale de* (E) *avec condition initiale* z*. On dit que la solution* $y(t; z_0)$ *est stable s'il existe un voisinage* V *de* z_0 *et une constante* C *telle que*

1. *Pour tout* $z \in V$, $t \longmapsto y(t; z)$ *est définie sur* $[t_0, +\infty[$.
2. *Pour tout* $z \in V$ *et* $t \geqslant t_0$*, on a*
$$\|y(t; z) - y(t; z_0)\| \leqslant C\|z - z_0\|$$

On dit que la solution $y(t; z_0)$ *est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage* V *de* z_0 *et* γ *une fonction qui tend vers 0 telles que*
$$\forall z \in V, \forall t \geqslant t_0, \|y(t; z) - y(t; z_0)\| \leqslant \gamma(t)\|z - z_0\|$$

Illustration 48 : Voir annexe.

Remarque 49 : Dans le cas d'une équation autonome $y' = f(y)$, on parle plutôt de "points d'équilibre" pour les solutions constantes telles que $f(y) = 0$.

Proposition 50. *On considère l'équation différentielle linéaire à coefficients constants* $Y' = AY$*. On suppose que pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$*, alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Illustration 51 : Voir annexe.

Théorème 52. *Soit* $F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *une fonction* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $F(0) = 0$*. On considère l'équation différentielle* $Y' = F(Y)$ *.*
On suppose que les valeurs propres de la différentielle $\mathrm{d}^2F(0)$ *sont de partie réelle* < 0*, alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

DEVELOPPEMENT 2 Preuve du lemme de Gronwall.

Proposition 53 (Perturbation linéaire)**.** *Soit* $A_n, A \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R}, M_N(\mathbb{R})\big)$ *et* $b_n, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$*. Soit* y_n *une solution de* $z' = A_n z + b_n$ *et* y *une solution de* $z' = Az + b$*.*
Si (A_n) *converge uniformément vers* A*,* (b_n) *converge uniformément vers* b *et si* $y_n(0) \longrightarrow y(0)$*, alors* (y_n) *converge uniformément vers* y *sur tout compact.*

Théorème 54 (Perturbation d'un système linéaire)**.** *On considère l'équation* (E) : $Y' = AY + g(t, Y)$ *où* g *est continue. On suppose que les valeurs propres de* A *sont de partie réelle* < 0*. Alors, on a les résultats de stabilité :*

1. *S'il existe* $k : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *positive continue telle que* $\lim_{t \to +\infty} k(t) = 0$ *et*
$$\forall t \geqslant t_0, \forall Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m, \big\|g(t, Y_1) - g(t, Y_2)\big\| \leqslant k(t)\|Y_1 - Y_2\|$$
Alors, toute solution de (E) *est asymptotiquement stable.*
2. *Si* $g(t, 0) = 0$ *et s'il existe* $r_0 > 0$ *et* $k : [0, r_0] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est continue telle que* $\lim_{r \to 0} k(r) = 0$ *et*
$$\forall r \leqslant r_0, \forall t \geqslant t_0, \forall Y_1, Y_2 \in B(0, r), \big\|g(t, Y_1) - g(t, Y_2)\big\| \leqslant k(r)\|Y_1 - Y_2\|$$
Alors, il existe un voisinage V *de 0 telle que toute solution* $Y(t; Z_0)$ *de valeur initiale* $Z_0 \in V$ *est asymptotiquement stable.*

Exemple 55 : (Linéarisation) On considère les problèmes de Cauchy $\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & -\sin(x) \\ x(0) & = & a \\ x'(0) & = & 0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} y'' & = & -y \\ y(0) & = & a \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$. Alors,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \big|x(t) - y(t)\big| \leqslant \frac{a^3}{6}|t|$$

3.3 Système de Lotka-Volterra

DEVELOPPEMENT 3

Théorème 56. *On considère le problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax - bxy \\ y' & = & -cy + dxy \\ \big(x(0), y(0)\big) & = & (x_0, y_0) \end{array}\right.$ *avec* $x_0, y_0 > 0$*. Alors,*

1. *Si* (x, y) *est une solution maximale, alors* $x, y > 0$*.*
2. $H : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto a\ln(y) + c\ln(x) - by - dx$ *est une intégrale première.*
3. *La solution maximale est globale.*
4. x *et* y *sont périodiques.*

4 Résolution numérique

On considère le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$ à résoudre sur $[t_0, t_0+T]$. On subdivise $t_0 < t_1 ... < t_N = t_0 + T$ et on note $h_n = t_{n+1} - t_n$ et $h_{\max} = \max\limits_{0 \leqslant n \leqslant N-1} (h_n)$.

Définition 57. *Un schéma numérique à un pas est une fonction $\Phi : [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On réalise cette méthode via une suite récurrente définie par*

$$\forall 0 \leqslant n \leqslant N-1, y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

Remarque 58 :
- La méthode d'Euler explicite est celle associée à $\Phi(t,y,h) = f(t,y)$.
- La méthode de Crank-Nicholson est celle associée à $\Phi(t,y,h) = f\left(t + \dfrac{h}{2}, y + \dfrac{h}{2} f(t,y)\right)$.

Définition 59 (Consistance)**.** *Soit Φ un schéma numérique et une suite (y_n) qui le réalise. On note z l'unique solution de $z' = f(t,z)$ telle que $z(t_n) = y_n$. L'erreur de consistance à un pas est définie par*

$$e_n = z(t_{n+1}) - y_{n+1} = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n \Phi\big(t_n, z(t_n), h_n\big)$$

On dit que le schéma est stable si pour toute solution exacte z, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |e_n| \underset{h_{\max}\to 0}{\longrightarrow} 0$. On dit qu'elle est d'ordre au moins p si $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |e_n| = O(h_{\max}^p)$.

Exemple 60 :
- La méthode d'Euler explicite est d'ordre 1.
- La méthode de Crank-Nicholson est d'ordre 2.

Théorème 61. *Un schéma Φ est consistant si, et seulement si,*

$$\forall (t,y) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}, \Phi(t,y,0) = f(t,y)$$

Définition 62 (Stabilité)**.** *On dit que la méthode est stable s'il existe $S \geqslant 0$ telle que pour toutes suites (y_n) et $(\widetilde{y}_n)$ définies par*

$$\begin{array}{lcl} y_{n+1} & = & y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ \widetilde{y}_{n+1} & = & \widetilde{y}_n + h_n \Phi(t_n, \widetilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n \end{array}$$

on ait

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \left|\widetilde{y}_n - y_n\right| \leqslant S \left(\left|\widetilde{y}_0 - y_0\right| + \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| \right)$$

Lemme 63 (Gronwall discret)**.** *Soit $h_n, \theta_n \geqslant 0$ et ε_n des suites telles que $\theta_{n+1} \leqslant (1 + \Lambda h_n)\theta_n + |\varepsilon_n|$. Alors,*

$$\theta_n \leqslant e^{\Lambda(t_n - t_0)} \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\Lambda(t_n - t_{i+1})} |\varepsilon_i|$$

Théorème 64. *Si Φ est lipschitzienne en y, alors la méthode Φ est stable et une constante de stabilité est $S = e^{\Lambda T}$.*

Exemple 65 : On suppose que f est k-lipschitzienne en y, alorslLa constante de stabilité est
- $S = e^{kT}$ pour la méthode d'Euler explicite.
- $S = e^{kT\left(1 + \frac{h_{\max}}{2} k\right)}$ pour la méthode de Crank-Nicholson.

Définition 66. *La méthode est convergente si pour toute solution exacte z, la suite (y_n) définie par $y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$ vérifie*

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \left|y_n - z(t_n)\right| \underset{(y_0, h_{\max}) \to \left(z(t_0), 0\right)}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 67. *Si la méthode est stable et consistante, alors elle est convergente.*

Exemple 68 : Les méthodes d'Euler explicite et de Crank-Nicholson sont convergentes.

Références :

- Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Rouvière, Petit guide du calcul différentiel.