

1 Différentiabilité

1.1 Différentielles

Définition 1. On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

L est alors unique et appelée la différentielle de f en a , notée $df(a)$. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ si $a \mapsto df(a)$ est continue.

Exemples 2 :

- Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, alors f est dérivable en a si, et seulement si, f est différentiable en a et alors $df(a) \cdot h = hf'(a)$.
- Si $f \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors f est différentiable partout et $\forall a \in \mathbb{R}^n, df(a) = f$.
- Si $f : (X, Y) \in M_n(\mathbb{R})^2 \longmapsto XY$, alors f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})^2$ et $df(X, Y) \cdot H = XH + HY$.

Proposition 3. Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Définition 4. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors il existe un unique vecteur, appelé gradient de f en a , tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Exemple 5 :

- Si $f(x) = \|x\|^2$, alors $\forall a \in \mathbb{R}^n, \nabla f(a) = 2a$.
- Si $N(x) = \|x\|$, alors $\forall a \neq 0, \nabla N(a) = \frac{a}{\|a\|}$.

Proposition 6. Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ deux applications différentiables en a , alors $f + \lambda g$ est différentiable en a et

$$d(f + \lambda g)(a) = df(a) + \lambda dg(a)$$

En particulier, si $p = 1$, $\nabla(f + \lambda g)(a) = \nabla f(a) + \lambda \nabla g(a)$.

Proposition 7. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ avec $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a) \in V$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Exemple 8 : Si $n = 1$, alors la formule s'écrit

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Proposition 9. Soit $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^p$ une application multilinéaire continue, alors f est différentiable partout et

$$df(x_1, \dots, x_n) \cdot (h_1, \dots, h_n) = \sum_{k=1}^n f(x_1, \dots, x_{k-1}, h_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Application 10 : Si B est une application bilinéaire continue et $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables, alors $\varphi : x \in U \longmapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable et

$$d\varphi(x) \cdot h = B(df(x) \cdot h, g(x)) + B(f(x), dg(x) \cdot h)$$

En particulier, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire et $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on note $\varphi(t) = \|\gamma(t)\|^2$, alors φ est dérivable et :

$$\varphi'(t) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle$$

Proposition 11. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. De plus,

- L'application $\text{Inv} : M \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto M^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ est différentiable et $\text{Inv}(M) \cdot H = -M^{-1}HM^{-1}$.
- L'application $\det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et $d\det(M) \cdot H = \text{Tr}(\text{Com}(M)^T H)$. Avec le produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$, on a $\nabla \det(M) = \text{Com}(M)$.

Proposition 12. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, alors

$$d(f^{-1})(x) = df(x)^{-1}$$

1.2 Dérivées partielles

Définition 13. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $v \in \mathbb{R}^n$ et $a \in U$, on dit que f admet une dérivée dans la direction v si l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto f(a + tv) \in \mathbb{R}^p$ est dérivable en 0, alors on note $f'_v(a) = \varphi'(0)$.

Proposition 14. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f admet une dérivée dans toutes les directions et on a

$$df(a) \cdot v = f'_v(a)$$

Remarque 15 : La réciproque est fautive : la fonction $(x, y) \mapsto \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$ admet des dérivées dans toutes les directions en 0, mais n'y est même pas continue.

Définition 16. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. La i -ième dérivée partielle de $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ en a est la dérivée dans la direction e_i en a , on note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$$

La matrice de $df(a)$ dans la base canonique est appelée la matrice jacobienne de f en a , noté $Jac_f(a)$:

$$Jac_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \dots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_p(a) & \dots & \partial_{x_n} f_p(a) \end{pmatrix}$$

Son déterminant est appelé le jacobien de f en a .

Proposition 17. On note $(dx_1, \dots, dx_n)$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i \quad \text{et} \quad \nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

Théorème 18. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. On suppose que toutes les dérivées partielles de f en a existe et qu'elles sont continues en a , alors f est différentiable en a et

$$df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Corollaire 19. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, alors f est $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, ses dérivées partielles existent et sont continues sur U .

Application 20 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$, différentiables, alors pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

1.3 Différentielles d'ordre supérieur

Définition 21. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^1$, on dit que f est deux fois différentiable en $a \in U$ si $a \in U \mapsto df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est différentiable. On note $d^2f(a)$ sa différentielle en a .

On dit que f est $\mathcal{C}^2$ si $a \mapsto d^2f(a)$ est continue.

Si $p = 1$, la matrice de $d^2f(a)$ dans la base canonique est appelée hessienne de f en a :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Proposition 22. Soit f différentiable deux fois en a , alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = d^2f(a) \cdot (e_i, e_j)$$

Proposition 23. f est $\mathcal{C}^2$ si, et seulement si, f admet des dérivées partielles secondes continues.

Théorème 24 (Schwarz). Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors, pour tout a , $d^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique, ie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Remarque 25 : L'existence des dérivées partielles n'assure pas la commutativité des deux opérateurs de dérivées partielles. $f : (x, y) \mapsto \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ prolongée par continuité en $(0, 0)$ par 0.

Application 26 : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, df(x) \in O(\mathbb{R}^n)$, alors f est une isométrie affine.

Théorème 27 (Accroissements finis). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $[a, b]$ un segment inclus dans U . On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et différentiable en tout point de $]a, b[$, on suppose qu'il existe M tel que $\forall x \in]a, b[, \|df(x)\| \leq M$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$$

Théorème 28 (Taylor avec reste intégral). Soit f une fonction $\mathcal{C}^{p+1}$ avec $a \in U$ tel que $[a + h] \subset U$, on a donc

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} d^k f(a) \cdot (h, \dots, h) + \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^{p+1} d^p f(a + th) \cdot (h, \dots, h) dt$$

2 Théorèmes fondamentaux

2.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 29 (Inversion locale). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. On suppose que $df(a)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f|_V : V \rightarrow W$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

Corollaire 30. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\forall a \in U, df(a)$ est inversible, alors f est une application ouverte.

Corollaire 31 (Inversion globale). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ et injective, alors on a équivalence entre :

1. $\forall a \in U, df(a)$ est inversible.
2. f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur son image.

Remarque 32 : Ce dernier corollaire est plutôt utilisé dans des cas abstraits : l'injectivité en général est difficile à obtenir. Si on ajoute de la régularité sur f (par exemple C^k), alors f est un C^k -difféomorphisme local.

Application 33 : Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$, alors f est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

Application 34 : L'application $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un C^1 -difféomorphisme.

2.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 35 (Fonctions implicites). Soit $f : U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application C^1 et $(a, b) \in U \times V$. On suppose que $d_2 f(a, b)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert V de a , un voisinage ouvert W de (a, b) et une application $\varphi \in C^1(V, F)$ tel que

$$\forall x \in V, f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in W, f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

De plus, on a

$$d\varphi(x) = -d_2 f(x, \varphi(x))^{-1} \circ d_1 f(x, \varphi(x))$$

Remarque 36 : Si f est supposée C^k , alors la fonction implicite φ est aussi C^k .

Théorème 37 (Forme normale des immersions). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 tel que $df(0)$ est injective. Alors, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant 0, un ouvert W tel que $f(W) \subset V$ et un C^1 -difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ tels que

$$\forall x \in W, \varphi \circ f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$

Théorème 38 (Forme normale des submersions). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 telle que $df(0)$ est surjective. Alors, il existe un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et un difféomorphisme $\psi : W \rightarrow \psi(W) \subset U$ tels que

$$\forall x \in W, f \circ \psi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n)$$

Définition 39. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application C^1 , on dit que

- f est une immersion si $df(x)$ est injective pour tout $x \in U$ (dans ce cas, $n \leq p$).
- f est une submersion si $df(x)$ est surjective pour tout $x \in U$ (dans ce cas, $n \geq p$).

Remarque 40 : Une fonction qui est à la fois une immersion et à la fois une submersion est un difféomorphisme local.

2.3 Sous-variétés

Définition 41. On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $f : U \rightarrow V$ tel que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

Remarque 42 : Une sous-variété est toujours localement fermée. N'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n .

Théorème 43. Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. On a équivalence entre :

1. M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.
2. Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.
3. Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a , un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et une immersion $h : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que h est un homéomorphisme entre Ω et $U \cap M$. On dit que h est une paramétrisation locale de M .
4. Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a , un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a^1, \dots, a^p)$ et une application C^1 $G : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $U \cap M$ soit le graphe de G .

Exemples 44 :

- **Par une submersion.** $S^n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}$ est une sous-variété de dimension n .
- **Par une immersion.** $\mathbb{T}^n = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}, x_1^2 + x_2^2 - 1 = \dots = x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 = 0\}$ est une sous-variété de dimension n .
- Le cône $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété (le point 3.).
- L'hypothèse d'homéomorphisme dans le point 3. est primordial : $t \mapsto (\cos t, \sin t, \cos(\sqrt{2}t), \sin(\sqrt{2}t))$ est une immersion injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4$ (géodésique irrationnelle du tore), mais son image est dense dans $\mathbb{T}^2$.

Exemples 45 :

- $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$ de $M_n(\mathbb{R})$.
- $SO_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in GL_n(\mathbb{R}), M^T M = I_n \text{ et } \det(M) = 1 \right\}$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R})$.
- Si $SO(p, q) = \left\{ M \in GL_n(\mathbb{R}), M^T I_{p,q} M = I_{p,q} \right\}$ avec $I_{p,q} = \text{diag}(I_p, -I_q)$, alors la composante connexe de l'identité $SO_0(p, q)$ est une sous-variété de $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

Définition 46 (Vecteur tangent). On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent à $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

On note $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents à M .

Théorème 47. Soit M une sous-variété dimension p de $\mathbb{R}^n$, alors $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension p .

Remarque 48 : On pourra faire la confusion entre l'espace vectoriel $T_x M$ et le plan tangent "géométrique" qui est l'espace affine tangent $x + T_x M$.

Théorème 49. Soit M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

- Si g est une submersion définie sur un voisinage U de x telle que $U \cap M = g^{-1}(g(x))$, alors $T_x M = \text{Ker}(dg(x))$.
- Si f est une paramétrisation locale de M en x , alors $T_x M = \text{Im}(df(x))$.

Exemples 50 :

- Soit f une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}$ est une sous-variété et $T_a M$ est la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, alors son plan tangent en $(1, 1, 1)$ est le plan d'équation $x + y + z = 1$.

Proposition 51. $\exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local entre 0 et I_n , on note Log cet inverse local.

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 52. Soit G un sous-groupe fermé non discret et connexe de $GL_n(\mathbb{R})$, (h_n) une suite d'éléments de G qui converge vers Id . Si h est une valeur d'adhérence de $\left(\frac{\text{Log}(h_n)}{\|\text{Log}(h_n)\|}\right)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, e^{th} \in G$.

Théorème 53 (Cartan-Von Neuman). Soit G un sous-groupe fermé non discret et connexe de $GL_n(\mathbb{R})$, alors G est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ et si $\mathfrak{g}$ est le plan tangent en l'identité, alors on a

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in G \right\}$$

Exemple 54 :

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(X) = 0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}), X^T = -X\}$$

DEVELOPPEMENT 2

- Lemme 55.**
1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $H \in H_n(\mathbb{C})$, $AHA^* = H$, alors A est une homothétie.
 2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $H \in H_n(\mathbb{C})$, $MH + HM^* = 0$, alors $M = 0$.

Théorème 56 (Isomorphisme exceptionnel).

$$PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_0(3, 1)$$

3 Extrema

3.1 Points critiques

Définition 57. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que $a \in U$ est un point critique si $df(a) = 0$.

Proposition 58. Les extrema locaux de f sont des points critiques de f .

Remarque 59 : La réciproque est fausse : $x \mapsto x^3$.

Exemple 60 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec U relativement compacte. On suppose que f est continue sur $\bar{U}$ et $f|_{\text{Fr}(U)} = 0$, alors f a un point critique dans U .

3.2 Condition d'ordre 2

Théorème 61. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Si f admet un minimum local en $a \in U$, alors $d^2 f(a) \geq 0$.
2. Si a est un point critique de f et si $d^2 f(a) > 0$, alors a est un minimum local strict de f .

Application 62 : Si $n = 2$, a un point critique de f , on note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

- Si $rt - s^2 > 0$, alors a est un minimum (resp. maximum) local de f si $r > 0$ (resp. $r < 0$).
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum en a , on dit que a est un point-selle.

DEVELOPPEMENT 3

Lemme 63. Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\mathcal{C}^1 \varphi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall M \in V, \varphi(M) = M^T A_0 M$$

Théorème 64 (Lemme de Morse). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, on suppose que 0 est un point critique de f et que $d^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n - p)$, alors il existe un difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ tel que

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$$

Application 65 : Les points critiques non dégénérés d'une fonction $\mathcal{C}^3$ sont isolés.

3.3 Optimisation sous contraintes

Lemme 66. Soit $a, b_1, \dots, b_k$ des formes linéaires sur un espace E de dimension n tel que $(b_1, \dots, b_k)$ est libre tel que $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(b_i) \subset \text{Ker}(a)$. Alors, $a \in \text{Vect}(b_1, \dots, b_k)$.

DEVELOPPEMENT 4

Théorème 67 (Extrema liés). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la contrainte

$$M = \{\omega \in U, g_1(\omega) = \dots = g_k(\omega) = 0\}$$

où les g_i sont $\mathcal{C}^1$ telles que pour tout $x \in M$, $(dg_1(x), \dots, dg_k(x))$ est libre.

On suppose que $f|_M$ admet un extremum local en $x \in M$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$df(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i dg_i(x)$$

Application 68 : Tout endomorphisme auto-adjoint admet au moins un vecteur propre.

Application 69 : On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique, alors

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in SL_n(\mathbb{R}), \|M\| \text{ est minimal}\}$$

Références :

- Avez, Calcul différentiel.
- Gourdon, Analyse.
- Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Rouvière, Petit guide du calcul différentiel.