

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Pandou

4 janvier 2022

1 Théorèmes d'inversion

1.1 Inversion locale

Théorème 1 (Inversion locale). *Soit E, F deux espaces normés de dimension finie et $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $df(a)$ est inversible.*

Alors, il existe un voisinage V de a et W de $f(a)$ tels que $f|_V : V \rightarrow W$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

Proposition 2. *Si $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme, alors pour tout $x \in U$, $df(x)$ est inversible et on a*

$$df^{-1}(f(x)) = df(x)^{-1}$$

Remarque 3 : L'énoncé est encore vrai si E et F sont des espaces de Banach, alors il faut supposer que $df(a)$ est un isomorphisme bicontinu!

Application 4 : Toute matrice A suffisamment proche de l'identité admet une racine k -ième.

Application 5 : $\exp$ réalise un difféomorphisme local entre un voisinage 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$.

En conséquence, il existe un voisinage V de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{R})$, on a $G \subset V \implies G = \{I_n\}$.

Application 6 : Soit $k \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, alors si $\|k\|_\infty$ est assez petit, alors il existe une solution $\mathcal{C}^2$ à l'équation $y'' + y'^2 + y^2 = k$ avec $f(0) = f(1)$ ¹.

Proposition 7. *Soit $f : U \rightarrow F$ une application $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in U, df(x)$ est inversible, alors $f(U)$ est un ouvert de F .*

Remarque 8 : On dit que f est étale. Cependant, f n'est pas nécessairement un difféomorphisme (contrairement au cas de la dimension 1), par exemple :

$$f : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

n'est pas injective.

1.2 Inversion globale

Théorème 9 (Inversion globale). *Soit E, F deux espaces normés de dimension finie et $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme si, et seulement si, f est injective sur U et $\forall x \in U, df(x)$ est inversible.*

Remarque 10 : Cet énoncé n'est utilisé que dans des exemples "abstraites" où l'injectivité est facile à établir. En effet, sinon l'injectivité peut en fait être aussi difficile à trouver qu'exhiber un inverse de f .

Exemple 11 : Si f est une dilatation $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$, alors f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

¹. Cette application doit être présentée si je veux présenter l'inversion locale dans le cadre Banach général.

Exemple 12 : L'application $u \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto u^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

1.3 Fonctions implicites

Théorème 13 (Fonctions implicites). Soit E, F, G trois espaces normés de dimension finie, U un ouvert de E et V un ouvert de F et $f : U \times V \rightarrow G$ une application $\mathcal{C}^1$.

On suppose qu'il existe $(a, b) \in U \times V$ tel que $d_2 f(a, b) \in \mathcal{L}(F, G)$ est inversible, alors il existe un voisinage W de a et W' de $f(a, b)$ et une unique fonction $g : W \times W' \rightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (w, w') \in W \times W', f(x, g(w, w')) = w$$

Proposition 14. Si on a en plus $f(a, b) = 0$, alors il existe un voisinage A de a et un voisinage B de b et une unique application $\mathcal{C}^1$ $g : A \rightarrow B$ tel que

$$\forall x \in A, f(x, g(x)) = 0$$

et de plus, on a

$$dg(x) = -[d_2 f(x, g(x))]^{-1} \circ d_1 f(x, g(x))$$

Remarque 15 : C'est souvent sous cette dernière forme que le théorème des fonctions implicites apparaît.

Remarque 16 : La fonction g a la même régularité que la fonction f .

Application 17 : Si f est $\mathcal{C}^\infty$, alors la fonction g admet des développements limités que l'on calcule à l'aide de la relation $f(x, g(x)) = 0$.

Application 18 : Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et x une racine simple de P , alors il existe une application $\varphi : U \subset \mathbb{R}_n[X] \rightarrow V \subset \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ où U est un voisinage ouvert de P et V un voisinage ouvert de x tel que

$$\forall Q \in U, \forall y \in V, Q(y) = 0 \iff y = \varphi(Q)$$

Application 19 de l'application 18 : L'ensemble des polynômes scindés à racines simples de $\mathbb{R}_n[X]$ est un ouvert.

2 Rang de la différentielle

Dans cette section, on suppose que E et F sont des espaces normés de dimension finie de dimension respectives n et p .

Proposition 20. Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est $\mathcal{C}^1$ et si $df(a) = r$, alors il existe un voisinage $U' \subset U$ contenant a tel que $\text{rg}(df(x)) \geq r$.

Remarque 21 : $x \mapsto \text{rg}(df(x))$ n'est pas nécessairement localement constant.

Théorème 21. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $df(a)$ est de rang n ou p , alors il existe un voisinage de a sur lequel $\text{rg}(df(x))$ reste de même rang.

2.1 Immersion

Définition 22. On dit que $f : U \subset E \rightarrow F$ est une immersion en $a \in U$ si f est $\mathcal{C}^1$ et que $df(a)$ est injective. En particulier, on a $n \leq p$.

Théorème 23 (Forme normale). Soit f une immersion en 0 , alors il existe un ouvert V de F contenant 0 , un ouvert U' contenu dans U tel que $f(U') \subset V$ et un difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow f(V)$ tel que

$$\varphi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

Remarque 25 : Autrement dit, il n'y a localement qu'une seule immersion à un difféomorphisme près à l'arrivée : c'est l'injection canonique $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^p$.

Application 26 : Une immersion admet toujours un inverse local à gauche.

Interprétation 27 : Si $p = 1$, l'image de f est une courbe $\mathcal{C}^1$, on a donc que localement toute portion de courbe peut être transformé en un segment par un difféomorphisme.

2.2 Submersion

Définition 28. On dit que $f : U \subset E \rightarrow F$ est une submersion en $a \in U$ si f est $\mathcal{C}^1$ et que $df(a)$ est surjective. En particulier, $n \geq p$.

Théorème 29 (Forme normale). Soit f une submersion en 0 , alors il existe un ouvert W de E contenant 0 , un difféomorphisme $\psi : W \rightarrow \psi(W) \subset U$ tels que

$$f \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$$

Remarque 30 : Autrement dit, il n'y a localement qu'une seule submersion à un difféomorphisme près au départ : c'est la projection canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Remarque 31 : Une submersion admet toujours un inverse local à droite.

Interprétation 32 : Quand $n = 1$, on a que modulo un changement de variables, une fonction scalaire à différentielle non nulle est une forme linéaire.

Théorème 33 (Rang constant). Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\text{rg}(\text{d}f(x))$ est constant sur U , alors pour tout $x_0 \in U$, il existe un difféomorphisme φ d'un ouvert $0 \in U$ de E sur un ouvert U' contenant x_0 dans U avec $\varphi(0) = x_0$ et un difféomorphisme ψ d'un ouvert V' contenant $f(x_0)$ sur un ouvert $V \subset F$ contenant 0 tel que $\psi(f(x_0)) = 0$ et tel que

$$\psi \circ f \circ \varphi : U \rightarrow V \quad \text{est la restriction d'une application linéaire de } E \text{ dans } F$$

2.3 Extrema

Définition 34. On dit que $a \in U$ est un point critique de f si $\text{d}f(a) = 0$.

Proposition 35. Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en $a \in U$, alors $\text{d}f(a) = 0$.

Théorème 36 (Lemme de Morse). Soit $U \subset E$ un ouvert contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^3$. Si 0 est un point critique de f et si $\text{d}^2 f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature (p, q) , alors il existe un difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : V \subset U \rightarrow \varphi(V)$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = \varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) - \dots - \varphi_n^2(x)$$

Remarque 38 : Si $\text{d}^2 f(0)$ est définie positive, alors 0 est un minimum local de f .

3 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

3.1 Caractérisations et espace tangent

Définition 39. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$, on dit que M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert 0 de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tel que

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

Théorème 40 (Caractérisations). Soit $M \subset \mathbb{R}^n$, alors on a équivalence entre :

1. M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.
2. Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.
3. Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant a , Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 une immersion $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui réalise un homéomorphisme entre Ω et $U \cap M$.
4. Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a , un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant a et $G : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ $\mathcal{C}^1$ tels que, $U \cap M$ soit le graphe de G (à permutation de coordonnées près).

Exemple 41 : $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n , car $x \mapsto \|x\|^2 - 1$ est une submersion en tout point de $\mathbb{S}^n$.

Définition 42. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent à $a \in A$ s'il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow A$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Proposition 43. L'ensemble des vecteurs tangents à une sous-variété de dimension p est un sous-espace vectoriel de dimension p . On note $T_x M$ l'espace tangent à M en x .

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 44. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$. On note

$$M = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x)\}$$

On suppose que pour tout $x \in M$, $(\text{d}g_i(x))$ forme une famille libre. Si $f|_M$ admet un extremum en $a \in M$, alors

$$\exists! \lambda_1, \dots, \lambda_r, \text{d}f(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \nabla g_i(a)$$

Application 45 : Soit u un endomorphisme auto-adjoint, alors u admet un vecteur propre. Conséquence : Théorème spectral.

Application 46 : On note $\|M\|_2^2 = \text{Tr}(M^T M)$. Alors,

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in SL_n(\mathbb{R}), \|M\|_2^2 \text{ minimal}\}$$

3.2 Vers les groupes de Lie

Définition 47. Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, alors, on définit

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in G\}$$

Proposition 48. $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 49. Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}$ et W un voisinage de Id dans G tels que $\exp$ est un difféomorphisme entre V et W .

Lemme 50. Soit (h_n) une suite d'éléments de G tendant vers Id avec $h_n \neq \text{Id}$. Si h est une valeur d'adhérence de $\left(\frac{\text{Log}(h_n)}{\|\text{Log}(h_n)\|}\right)$, alors $h \in \mathfrak{g}$.

Corollaire 51. G est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\mathfrak{g}$. En conséquence, $T_{I_n} G = \mathfrak{g}$.

Références :

- Avez, Calcul différentiel.
- Chaperon, Calcul différentiel et calcul intégral.
- Gourdon, Analyse.
- Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles.
- Mneimé, Testard, Introduction aux groupes de Lie classiques.
- Pommellet, Cours d'analyse.