213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Pandou

14 mai 2022

E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1 Espaces préhilbertiens et complétude

1.1 Espaces préhilbertiens

Définition 1. *Un produit hermitien est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que*

1. *Pour tout $y \in E$, $\langle \cdot, y \rangle$ est linéaire.*
2. *$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.*
3. *$\forall x \in E, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$.*
4. *Si $\langle x, x \rangle = 0$, alors $x = 0$.*

On note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Exemple 2 :

- Sur $\mathbb{C}^n$, on a le produit hermitien canonique défini par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.
- Sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$, on a un produit hermitien par $(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$.

Théorème 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tout $x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont liés.*

Corollaire 4. *$\| \cdot \|$ est une norme sur E.*

Application 5 : Pour tout $y \in E$, la forme linéaire $\langle \cdot, y \rangle$ est continue.

Proposition 6 (Identité du parallélogramme)**.** *Soit $x, y \in E$, alors*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

1.2 Orthogonalité

Définition 7. *On dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. Une famille de vecteurs (e_i) est dite orthogonale si $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$. Elle est orthonormée si de plus, on a $\|e_i\| = 1$.*
Si A est une partie de E, on note $A^{\perp} = \{x \in E, \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$.

Proposition 8. *Si x et y sont orthogonaux, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Remarque 9 : Contrairement au cas réel, la réciproque est fausse : x et ix ne sont pas orthogonaux, mais on a $\|x + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|ix\|^2$.

Méthode 10 : (Orthonormalisation de Schmidt) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de E, on construit une base orthogonale $(u_1, ..., u_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$ telle que $u_k \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$.

- $u_1 = e_1$.
- Si $u_1, ..., u_{k-1}$ sont construits, alors

$$u_k = e_k + \lambda_{1,k} u_1 + ... + \lambda_{k-1,k} u_{k-1} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_{i,k} = -\frac{\langle u_i, e_k \rangle}{\|u_i\|^2}$$

1.3 Complétude

Définition 11. *Soit (x_n) une suite d'éléments de E, on dit que (x_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \|x_p - x_q\| \leqslant \varepsilon$$

On dit que E est un espace de Hilbert si toute suite de Cauchy converge.

Exemple 12 :

- Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.
- $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni du produit scalaire $\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$ n'est pas un espace de Hilbert.

Théorème 13. *E est un espace de Hilbert si, et seulement si, toute série $\sum u_n$ absolument convergente (ie $\sum \|u_n\|$ converge) est convergente.*

Application 14 : L^2 muni de la norme $\|f\|_2 = \left(\int |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est complet.

Proposition 15. *Tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.*

2 Propriétés des espaces de Hilbert

On fixe H un espace de Hilbert.

2.1 Projection sur un convexe fermé

Théorème 16. *Soit C un convexe fermé et non vide de H, alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y = p_C(x) \in C$ tel que*

$$\|x - y\| = d(x, C)$$

De plus, le projeté orthogonal sur C $y = p_C(x)$ est caractérisé par

$$y \in C \qquad \text{et} \qquad \forall z \in C, \operatorname{Re}\big(\langle x - y, z - y\rangle\big) \leqslant 0$$

Proposition 17. *L'application p_C est 1-lipschitzienne.*

Proposition 18. *Soit F un sous-espace fermé de H, alors p_F est un opérateur linéaire de H sur F. Si $x \in E$, alors $p_F(x)$ est l'unique $y \in E$ tel que*

$$y \in F \qquad \text{et} \qquad x - y \in F^{\perp}$$

Corollaire 19. *Soit F un sous-espace fermé de H, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.*

Corollaire 20. *Soit F un sous-espace quelconque de H, alors $E = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.*
En particulier, F est dense si, et seulement si, $F^{\perp} = 0$.

Remarque 21 : Pour montrer qu'un sous-espace est dense, on montrera souvent que $F^{\perp} = 0$.

Remarque 22 : On peut toujours projeter sur un sous-espace de dimension finie : on peut alors espérer construire des approximations des solutions à un problème en projetant sur des sous-espaces “de plus en plus gros”.

2.2 Conséquence du théorème de projection

Théorème 23 (de représentation de Riesz)**.** *L'application $y \in H \longmapsto \langle \cdot, y\rangle \in H'$ est une isométrie surjective. Autrement dit, pour toute forme linéaire continue ϕ sur E, il existe un unique $y \in E$ tel que*

$$\forall x \in E, \phi(x) = \langle x, y\rangle$$

et $\|\phi\| := \sup\limits_{\|x\|=1} \big|\phi(x)\big| = \|y\|$.

Remarque 24 : Ceci fait que H' est un espace de Hilbert.

Proposition 25. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que*

$$\forall x, y \in H, \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

L'opérateur T^* est appelé adjoint de T et on a $\|T\| = \|T^*\|$.

Proposition 26. *L'application $T \in \mathcal{L}(H) \longmapsto T^* \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie involutive. De plus, on a*

$$\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad (TS)^* = S^* T^*$$

Exemple 27 : Si $H = \mathbb{C}^n$, si on identifie $\mathcal{L}(H)$ avec $M_n(\mathbb{C})$, alors T^* est la transconjuguée de T.

Définition 28. *On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $T^* = T$.*

Proposition 29. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint, alors*

$$\|T\| = \sup\big\{\big|\langle Tx, x\rangle\big|, \|x\| = 1\big\}$$

2.3 Convergence faible

Définition 30. *On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de H converge faiblement vers x si*

$$\forall y \in H, \lim_{n \to +\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Proposition 31. *Si (x_n) converge (fortement) vers x, alors (x_n) converge faiblement vers x.*

Remarque 32 : La réciproque est fausse : par exemple $e_n : t \longmapsto e^{int}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2([0, 2\pi])$, mais ne converge pas fortement.

Proposition 33. *Soit (x_n) une suite qui converge faiblement vers x, alors*

$$\liminf_{n \to +\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$$

Proposition 34. *Soit (x_n) une suite qui converge faiblement vers x, alors, on a équivalence entre :*

1. *(x_n) converge fortement vers x.*
2. *$\limsup\limits_{n \to +\infty} \|x_n\| \leqslant \|x\|$.*
3. *$\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|x\|$.*

Théorème 35. *De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.*

Exemple 36 : La convergence n'est pas forcément forte. Le même exemple que celui de la remarque 33 fournit un contre-exemple.

Proposition 37. *Soit (x_n) une suite qui converge faiblement vers x et T un opérateur sur H, alors (Tx_n) converge faiblement vers Tx.*

3 Bases hilbertiennes

3.1 Généralités

Définition 38. *On dit qu'une famille (e_n) est totale si $\mathrm{Vect}(e_n)$ est dense dans H. On dit que (e_n) est une base hilbertienne de H si (e_n) est une famille orthonormée totale.*

Exemple 39 : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de la remarque 33 est une base hilbertienne des fonctions continues périodiques et 2π-périodiques et même de $L^2(]0,2\pi[)$.

Proposition 40 (Inégalité de Bessel). *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale, alors pour tout $x \in H$.*

$$\sum_{i\in I} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Théorème 41 (Théorème de Parseval). *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale, alors on a équivalence entre :*

1. *(e_i) est une base hilbertienne de E.*
2. *Pour tout $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2$.*
3. *Si $x, y \in H$, alors $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$.*

Théorème 42. *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H, alors pour tout $x \in H$,*

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$$

au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $\left\| x - \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j \right\| \leqslant \varepsilon$.

Proposition 43. *Un espace préhilbertien est séparable si, et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.*

Corollaire 44. *Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si, et seulement s'il est isométrique à l'espace ℓ^2 des suites de carrés sommables.*

3.2 Application au traitement du signal

Définition 45. *Soit f une fonction continue et 2π-périodiques, on note $c_n(f)$ son n-ième coefficient de Fourier*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

Théorème 46 (Parseval). *Soit f continue et 2π-périodique, on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f)\right|^2$$

Théorème 47. *Si f est continue et 2π-périodique, on a d'autre part*

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

où $e_n(t) = e^{int}$.

Remarque 49 : On a une injection $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ vers $\ell^2(\mathbb{Z})$, mais elle n'est pas surjective : il existe des suites qui ne sont pas des coefficients de Fourier de fonctions continues.

Remarque 50 : Par contre, on peut définir les coefficients de Fourier pour $L^2(]0,2\pi[)$: tous les résultats sont vrais, mais cette fois L^2 est complet, donc on a une isométrie surjective $L^2(]0,2\pi[) \simeq \ell^2(\mathbb{Z})$.

Définition 51. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x$$

Théorème 52 (Inversion de Fourier L^1). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{i\xi x} \mathrm{d}\xi$$

Théorème 53 (Plancherel (admis)). *La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2$ s'étend en un unique opérateur continu sur L^2.*

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 54 (Échantillonnage de Shannon). *Soit $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on note*

$$BL^2 = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}(u) = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\right\}$$

Alors,

1. *BL^2 est un espace de Hilbert pour le produit hermitien usuel $\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} u\overline{v}$. On a enfin une injection $BL^2 \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.*
2. *Une base hilbertienne de BL^2 est $\left(\tau_k \mathrm{sinc}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ où $\tau_k f : x \longmapsto f(x-k)$.*
3. *$u \in BL^2 \longmapsto \left(u(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie. Plus précisément, on a*

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) \mathrm{sinc}(x-k)$$

où la convergence est à la fois L^2, à la fois uniforme.

4 Résolution d'EDP

4.1 Théorème de Lax-Milgram

Définition 55. *On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est coercive s'il existe $a > 0$ tel que*

$$\forall u \in H, a(u,u) \geqslant a\|u\|^2$$

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 56. *Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Alors, il existe un opérateur linéaire continue T sur H tel que*

$$\forall x, y \in H, a(x,y) = \langle Tx, y\rangle$$

De plus, T est un isomorphisme de H sur lui-même.

Corollaire 57 (Théorème de Lax-Milgram)**.** *Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur H et L une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$\forall y \in H, a(u,y) = L(y)$$

Si de plus, a est symétrique, on pose $E(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x)$ et alors u est caractérisé par

$$E(u) = \min_{x \in E} E(x)$$

4.2 Espaces de Sobolev en dimension 1

Définition 58. *On définit $H^1(]0,1[)$ l'ensemble des fonctions L^2 dont la dérivée au sens des distributions est aussi L^2.*

Proposition 59. *$H^1(]0,1[)$ muni de $\langle u,v\rangle_{H^1} = \langle u,v\rangle_{L^2} + \langle u',v'\rangle_{L^2}$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 60. *On a une injection continue $H^1(]0,1[) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$.*

Définition 61. *On définit $H^1_0(]0,1[)$ l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_c(]0,1[)$ pour la norme H^1.*

Proposition 62.

$$H^1_0(]0,1[) = \big\{u \in H^1(]0,1[), u(0) = u(1) = 0\big\}$$

Proposition 63 (Inégalité de Poincaré)**.** *Pour tout $u \in H^1_0(]0,1[)$, on a*

$$\|u_{L^2}\| \leqslant \frac{1}{\pi}\|u'\|_{L^2}$$

Ainsi, $u \in H^1_0 \longmapsto \|u'\|_{L^2}$ est une norme sur H^1_0 équivalente à H^1.

4.3 Quelques exemples de résolutions

Définition 64 (Équation de Dirichlet)**.** *Une solution faible au problème (E) : $\begin{cases} -u'' + u & = & f \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{cases}$ est une fonction $u \in H^1_0(]0,1[)$ telle que*

$$\forall v \in H^1_0, \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv$$

Proposition 65. *Toute solution classique à ce problème est une solution faible.*

Théorème 66. *Pour tout $f \in L^2$, il existe un unique $u \in H^1_0$ solution faible de (E). Cette solution est en plus $\mathcal{C}^2$, donc (E) admet une unique solution classique.*

Définition 67 (Équation de Sturm-Liouville)**.** *On considère le problème (E) : $\begin{cases} -(pu')' + qu & = & f \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{cases}$ où p est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $p \geqslant \alpha > 0$, q continue sur $[0,1]$ positive et $f \in L^2(]0,1[)$.*
Une solution faible de (E) est une fonction $u \in H^1_0(]0,1[)$ telle que

$$\forall v \in H^1_0(]0,1[), \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv = \int_0^1 fv$$

Proposition 68. *Toute solution classique à ce problème est également solution faible.*

Théorème 69. *Le problème (E) a une unique solution faible $u \in H^1_0$. Cette solution est en plus $\mathcal{C}^2$, donc (E) admet une unique solution classique. Celle-ci s'obtient en minimisant $v \in H^1_0 \longmapsto \frac{1}{2}\int_0^1 (p'v^2 + qv^2) - \int_0^1 fv$.*

Remarque 70 : On peut de même résoudre le problème plus général

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu & = & f \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{cases}$$

avec des hypothèses raisonnables sur p, r et q.

Références :

- Beck, Malick, Peyre, Objectif agrégation.
- Brézis, Analyse fonctionnelle.
- Gourdon, Analyse.
- Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.