

On utilisera souvent implicitement le théorème central suivant :

Théorème 1. Soit (X, d) un espace métrique complet et D une partie dense de X . Alors, toute application uniformément continue sur D se prolonge en une unique application continue sur X , elle est même uniformément continue.

1 Approximation polynomiale

1.1 Approximation locale

Théorème 2 (Taylor-Young). Soit f une fonction dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a , alors elle admet un développement limité en a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Remarque 3 : Admettre un développement limité à l'ordre 1 est équivalent à être dérivable. C'est faux à partir de l'ordre $n \geq 2$: $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Théorème 4 (Taylor-Lagrange). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Corollaire 5 (Inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ où E est un espace normé qui est $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n+1$ sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe M tel que $\forall x \in]a, b[, \|f^{(n+1)}(x)\| \leq M$, alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 6 (Taylor avec reste intégral). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$$

Application 7 : (Propagation du local) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur $] -a, a[$. On suppose qu'il existe $r > 0$ et une fonction $\varphi :] -r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq \varphi(x)$. Alors, f est développable en série entière sur $] -r, r[$.

Application 8 : (Théorème de Bernstein) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur $] -a, a[$. Si $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k)} \geq 0$, alors f est développable en série entière sur $] -a, a[$.

1.2 Interpolation

Théorème 9. Soit $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ des points deux à deux distincts et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Alors, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i)$$

Si on pose $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$, alors $P(X) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(X)$.

Application 10 : Si $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$, alors $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Définition 11. Le polynôme P défini précédemment est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(x_i, f(x_i))$. Les polynômes (L_i) forme la base d'interpolation aux points x_i .

Théorème 12. On suppose que f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) \quad \text{où} \quad \pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

Corollaire 13.

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|\pi_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Lemme 14. On note $\varphi_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - k)$, alors $\|\varphi_n\|_{\infty, [0, n]} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{e \ln(n)}$.

Théorème 15. On subdivise $[a, b]$ en $n+1$ points équidistants : $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. Alors,

$$\|\pi_{n+1}\|_\infty \sim_{n \rightarrow +\infty} h^{n+1} \frac{n!}{e \ln(n)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{\ln(n)} \left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}$$

Définition 16. On subdivise $[a, b]$ en $n+1$ points appelés points de Tchebychev : $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$

Définition 17. On définit $T_0 = 1$, $T_1(X)$ et $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$, appelés polynômes de Tchebychev.

Lemme 18. On a $\|T_n\|_{\infty, [-1, 1]} = 1$.

Théorème 19. Pour une interpolation aux points de Tchebychev, on a

$$\|\pi_{n+1}\|_{\infty, [a, b]} = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

Remarque 20 : L'interpolation aux points de Tchebychev est bien meilleure que celle aux points équirépartis. En fait, on ne peut pas faire mieux.

Proposition 21 (Phénomène de Runge). On considère $f : x \in [-1, 1] \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$. Soit $P_n^{\text{équi}}$ le polynôme d'interpolation à $2n$ points équidistants dans $[-1, 1]$, alors $P_n^{\text{équi}}$ ne converge pas uniformément vers f .

Remarque 22 : Je crois que pour les points de Tchebychev, on a convergence uniforme, mais je n'ai pas trouvé de bonnes références (à part essayer numériquement).

1.3 Approximation uniforme

Définition 23. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et on pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$. Les $B_n(f)$ sont appelés les polynômes de Bernstein de f .

Définition 24. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On définit pour $\delta > 0$

$$\omega(\delta) = \sup \{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq \delta\}$$

Proposition 25. ω est correctement défini car f est uniformément continue (théorème de Heine). Et on a :

1. ω une fonction croissante et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = 0$.
2. Pour tout $t, t' \geq 0$, $\omega(t+t') \leq \omega(t) + \omega(t')$.

Théorème 26. La suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f . Plus précisément, on a

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Corollaire 27. Si f est lipschitzienne, alors $\|B_n(f) - f\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Application 28 : Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$.

Application 29 : Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on définit sa transformée de Laplace par $\mathcal{L}(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$. Alors, $\mathcal{L}$ est injective.

1.4 Approximation L^2

Définition 30. Soit E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_n \in E$, on note $\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $G(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_n))$.

Lemme 31. Soit E un espace préhilbertien, V un sous-espace de E de dimension finie muni d'une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$, alors

$$\forall x \in E, d(x, V)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Lemme 32 (Déterminant de Cauchy). Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts tels que $a_i + b_j \neq 0$. Alors,

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\prod_{i < j} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i, j} (a_i + b_j)}$$

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 33 (Müntz). Soit (α_n) une suite de réels strictement positifs et strictement croissante. Alors, $\text{Vect}(x^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans L^2 si, et seulement si, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Application 34 : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans L^2 .

2 Approximation des fonctions intégrables

2.1 Vers l'intégrale de Riemann

Définition 35. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ une fonction en escalier. Si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision adaptée à φ , alors on définit

$$I(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \varphi(x_i)$$

Remarque 36 : On définit ainsi une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a, b])$, continue pour la norme uniforme.

Proposition 37. L'adhérence de $\mathcal{E}([a, b])$ pour la norme uniforme est l'espace des fonctions réglées, ie qui ont une limite à gauche et à droite en tout point. En particulier, toute fonction continue par morceaux est limite uniforme de fonctions en escalier.

Corollaire 38. La forme linéaire continue $I : \mathcal{E}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend en une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions réglées. En particulier, on définit ainsi l'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux.

Théorème 39. Soit f une fonction réglée et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ et $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, on note $S_n(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$, on note $h_n = \sup |x_i - x_{i-1}|$. Alors,

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} S_n(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Corollaire 40. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$.

2.2 Vers l'intégrale de Lebesgue

On fixe $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On rappelle que $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Définition 41. Une fonction simple est une fonction de la forme $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où I est fini et A_i est mesurable.

Théorème 42. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors, il existe une suite de fonctions simples (f_n) qui converge simplement vers f .

1. Si $f \geq 0$, alors on peut choisir (f_n) croissante et positive.
2. Si f est bornée, alors on peut choisir (f_n) de sorte que la convergence soit uniforme.

Remarque 43 : Ceci permet de construire l'intégrale de Lebesgue : si $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors $\int f d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i)$. Ceci permet d'étendre la définition aux fonctions mesurables positives, puis aux fonctions dites intégrables.

Théorème 44 (Beppo-Levi). Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables et positives et $f = \lim f_n$ qui est mesurable positive, alors

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

Corollaire 45 (Lemme de Fatou). Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives, alors

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

Corollaire 46 (Convergence dominée). Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables tel que (f_n) converge simplement μ -presque partout vers f . S'il existe g intégrable telle que μ -presque partout, on a $|f_n| \leq g$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \quad \text{en particulier,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Application 47 : Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'ensemble des fonctions simples est dense dans L^p .

Théorème 48. L^p muni de la norme $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} f^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ est un espace complet.

Théorème 49 (Admis). Ici, on suppose que $X = \mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne complétée et de la mesure de Lebesgue et $1 \leq p < +\infty$. Alors,

1. L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans L^p .
2. L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p .

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 50 (Inégalité de Hardy). Soit $p > 1$, pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, on définit $T_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Alors, $T : L^p(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+)$ est un opérateur continu. Plus précisément,

$$\forall f \in L^p, \|T_f\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}$$

Et la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale.

2.3 Convolution et régularisation

Définition 51. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors on définit une fonction pour presque tout x par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

Proposition 52. Le produit de convolution est associatif et commutatif.

Théorème 53. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$. $(L^1, *)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre sans unité.

Définition 54. On dit qu'une suite (ρ_n) d'éléments intégrables et positifs est une approximation de l'unité si

1. $\int_{\mathbb{R}} \rho_n dx = 1$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq \varepsilon} \rho_n(x) dx = 0$.

On dit que (ρ_n) est régularisante si ρ_n est $\mathcal{C}^\infty$.

Exemples 55 :

- $\rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ est une approximation de l'unité.
- Soit ρ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux et positive telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$, on pose $\rho_t(x) = \frac{1}{t} \rho\left(\frac{x}{t}\right)$ qui forme une approximation de l'unité.

Théorème 56. Soit (ρ_n) une approximation de l'unité, $1 \leq p \leq +\infty$ et $f \in L^p$, alors $\rho_n * f \xrightarrow{L^p} f$.

Théorème 57. Soit φ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $f \in L^1_{loc}$, alors $f * \varphi$ est définie partout et est $\mathcal{C}^1$. De plus, $(f * \varphi)' = f * \varphi'$.

Théorème 58. 1. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour la norme infinie.
2. Si $1 \leq p < +\infty$, alors $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans L^p .

3 Séries de Fourier

Définition 59. Soit f une fonction continue par morceaux et 2π -périodiques, on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$ et $S_N(f) : t \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n(f)e^{int}$ la série de Fourier de f .

On note aussi $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$.

Théorème 60 (Parseval (Admis)). Soit f continue par morceaux et 2π -périodiques, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

3.1 Noyau de Dirichlet

Définition 61. On note $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$ le noyau de Dirichlet.

Proposition 62. On a

1. D_N est pair et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1$.
2. $D_N(x) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$.
3. $S_N(f) = f * D_N$.

Théorème 63 (Dirichlet). On suppose que f est 2π -périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que $\forall t, f(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$, alors $S_N(f)$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 64. Si f est de plus continue, alors $S_N(f)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Application 65 : Avec $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$ prolongée par 2π périodicité, on trouve

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

3.2 Noyau de Féjer

Définition 66. On note $K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$ le noyau de Féjer.

Proposition 67. On a

1. $K_N(x) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx}$ et $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2$.
2. $\|K_N\|_{L^1} = 1$.
3. $\sigma_N(f) = f * K_N$.

Théorème 68 (Féjer). 1. Si f est continue et 2π -périodique, alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f .

2. Soit $f \in L^p$ et 2π -périodique, alors $\sigma_N(f)$ converge vers f dans L^p .

Corollaire 69. Toute fonction continue et 2π -périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Corollaire 70. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : t \mapsto e^{int}$, alors la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale dans L^2 .

Références :

- Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.
- Briane, Pagès, Gilles. Théorie de l'intégration.
- Gourdon, Analyse.
- Rombaldi, Éléments d'analyse réelle.
- Zuily, Quéffelec. Analyse pour l'Agrégation.