

1 Prolongement de régularité

1.1 Prolongement par continuité

On fixe X et Y deux espaces métriques.

Proposition 1. Soit $f : D \rightarrow Y$ et $a \in \overline{D}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, que l'on note ℓ . Alors la fonction $\tilde{f} : x \in D \cup \{a\} \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$ définit un prolongement continu de f .

Exemple 2 :

- La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0 par la valeur 1.
- La fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité en 0 par la valeur 0.
- La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

Théorème 3 (Heine). Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Exemple 4 : Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f admet un prolongement continu en 0 si, et seulement si, f est uniformément continue sur $]0, 1]$.

1.2 Prolongement lisse

Théorème 5. Soit I un intervalle, E un espace normé et $f : I \rightarrow E$ continue dérivable et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' possède une limite ℓ en a , alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Remarque 6 : Cela fait même de f une fonction $\mathcal{C}^1$.

Exemples 7 :

- La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0, n'est pas dérivable en 0.
- Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, alors f est $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque 8 : Ce théorème sert notamment pour le raccord de solutions à une équation différentielle non résolue.

- L'équation $xy' - y = 0$ se résout sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. L'étude du raccord en 0 montre que 0 est la seule solution de cette équation (bien qu'elle soit d'ordre 1!).
- L'équation $x^2y' - y = 0$ se résout sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. L'étude du raccord en 0 montre que les solutions sont toutes proportionnelles à f (définie dans l'exemple précédent).
- L'équation $ty' - 2y = t^3$ admet un ensemble de solutions de dimension 2, bien qu'elle soit d'ordre 1.

Application 9 : Il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi|_{[a, b]} = 1$ et tel que $\varphi = 0$ en dehors d'un voisinage de $[a, b]$.

1.3 Équations différentielles

Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On note (E) l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$.

Définition 10. Une solution de (E) est un couple (J, y) où J est un intervalle de $]a, b[$ et $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t))$$

Définition 11. Soit (J, y) une solution de (E) . On dit que :

1. La solution est maximale si y n'a pas de prolongement strict. C'est-à-dire qu'il n'existe pas de solution $(\tilde{J}, \tilde{y})$ telle que $J \subsetneq \tilde{J}$ et $\tilde{y}|_J = y$.
2. La solution est globale si $J =]a, b[$.

Remarque 12 : Toute solution globale est nécessairement maximale. Mais la réciproque est fautive : les solutions maximales de $y' = y^2$ ne sont pas globales.

Remarque 13 : On munit l'ensemble des solutions de (E) d'une relation d'ordre en posant $(J_1, y_1) \prec (J_2, y_2)$ si $J_1 \subset J_2$ et $y_2|_{J_1} = y_1$.

Proposition 14 (Admis). *Toute solution de (E) se prolonge en une solution maximale (non nécessairement unique).*

Théorème 15 (Cauchy-Péano). *Pour tout $(t_0, x_0) \in]a, b[\times \mathbb{R}^n$, il existe une solution maximale de (E) définie sur un intervalle ouvert telle que $y(t_0) = x_0$.*

Théorème 16 (Cauchy-Lipschitz). *Si de plus, f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors la solution maximale est unique.*

Théorème 17 (Sortie de tout compact). *Soit (J, x) une solution maximale de (E) avec $J =]T_-, T_+[$. Alors, on a l'alternative :*

1. $T_+ = b$ (resp. $T_- = a$).
2. $T_+ < b$ et $\lim_{t \rightarrow T_+} |x(t)| = +\infty$ (resp. $T_- < a$ et $\lim_{t \rightarrow T_-} |x(t)| = +\infty$).

Corollaire 18. *Soit (J, x) une solution de (E) avec $J =]\alpha, \beta[$. Si x reste bornée au voisinage gauche (resp. droit) de β (resp. de α), alors x admet un prolongement au delà de β (resp. α).*

Application 19 : On suppose que f est bornée, alors toute solution de (E) est globale.

Par exemple, le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x' &= \frac{x^2}{1+x^2} \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$
 admet une unique solution globale définie sur $\mathbb{R}$.

Lemme 20 (Gronwall). *Soit f, g deux fonctions continues positives telles qu'il existe $C > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq C + \int_{t_0}^t f(s)g(s)ds$$

alors,

$$\forall t \geq t_0, f(t) \leq C \exp \left(\int_{t_0}^t g(s)ds \right)$$

Application 21 : On suppose que pour tout compact K de I , il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall (t, x) \in K \times \mathbb{R}^n, |f(t, x)| \leq \alpha|x| + \beta$$

alors, toute solution de (E) est globale. Par exemple, les solutions des systèmes linéaires sont toutes globales.

2 Analyse complexe

2.1 Prolongement analytique

Définition 22. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique si pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage V de x_0 et une série entière $\sum a_n x^n$ tels que*

$$\forall x \in V, f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (x - x_0)^n$$

Proposition 23. *Toute fonction analytique est C^∞ .*

Remarque 24 : La réciproque est fausse dans $\mathbb{R}$ comme le montre l'exemple 7 et le théorème suivant.

Théorème 25 (Zéros isolés). *Si Ω est connexe, l'ensemble des zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sur Ω n'a pas de point d'accumulation dans Ω .*

Corollaire 26 (Prolongement analytique). *Soit Ω un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur une partie de Ω contenant un point d'accumulation dans Ω , alors elles sont égales sur tout Ω .*

Exemple 27 : La seule fonction analytique sur $\mathbb{C}$ telle que $\forall n \geq 1, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$ est $z \mapsto z^3$.

Remarque 28 : Si le point d'accumulation n'est pas dans Ω , le résultat est faux. En effet, si $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$, alors la fonction nulle et $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$ ont des zéros en les $\frac{1}{n}$, pourtant ne sont pas égales.

DEVELOPPEMENT 1

Définition 29. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur un disque ouvert et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe dans $\mathbb{C}$. Un prolongement de f le long de γ est une famille de couples $(f_t, D_t)_{t \in [0, 1]}$ tels que :*

- D_t est un disque ouvert centré en $\gamma(t)$ et $f_t : D_t \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.
- $(f_0, D_0) = (f, D)$.
- Pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|t - t'| < \varepsilon$, alors $\gamma(t') \in D_t \cap D_{t'}$ et $f_{t'} = f_t$ sur $D_t \cap D_{t'}$.

Proposition 30. *Si (f_1, D_1) et $(\tilde{f}_1, \tilde{D}_1)$ sont les extrémités de deux prolongements analytiques le long d'un chemin γ , alors $f_1 = \tilde{f}_1$ sur $D_1 \cap \tilde{D}_1$.*

Remarque 31 : Ceci ne permet a priori pas d'étendre le domaine d'analyticité d'une fonction f . En effet, le prolongement le long de deux chemins différents vers un même point ne coïncident pas nécessairement.

2.2 Holomorphie

Proposition 32. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, toute fonction analytique est holomorphe.

Théorème 33 (Cauchy). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors,

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Corollaire 34. Toute fonction holomorphe est analytique.

Corollaire 35. Soit f une fonction analytique réelle sur $I \subset \mathbb{R}$, alors il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant I et g une fonction holomorphe sur Ω telle que $g|_I = f$.

2.3 Le bord du disque de convergence

Théorème 36 (Abel angulaire). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 de somme f . Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on considère le domaine angulaire $\mathcal{A}_{\theta_0} = \{1 - \rho e^{i\theta}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \rho > 0\}$. On suppose que $\sum a_n$ converge, alors

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \in \mathcal{A}_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

Application 37 : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries convergentes, on note $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Si $\sum c_n$ converge, alors on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \right)$$

Théorème 38 (Tauberien faible). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 de somme f . On suppose que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ existe, on note S . On suppose que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et on a $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Remarque 39 : En fait, on peut encore plus affaiblir l'hypothèse en $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, mais le théorème est alors beaucoup plus difficile à montrer.

Exemple 40 : On a $\forall |z| < 1, \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{1}{2}$, mais pourtant $\sum (-1)^n$ ne converge pas.

3 Prolongement d'opérateurs

On utilisera dans cette section le théorème suivant pour prolonger les opérateurs

Théorème 41. Soit X, Y deux espaces métriques avec Y complet et $f : D \subset X \rightarrow Y$ uniformément continue avec D dense dans X . Alors, il existe une unique application $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ continue qui prolonge f , $\tilde{f}$ est même uniformément continue.

Remarque 42 : En particulier, toute application linéaire continue sur une partie dense se prolonge en un opérateur linéaire.

3.1 Vers l'intégrale de Riemann

Définition 43. On dit que $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escaliers s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tel que φ est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions en escaliers.

On dit que φ est réglée lorsqu'elle admet des limites à gauche et à droite en tout point, on note $\mathcal{R}([a, b])$ l'espace vectoriels des fonctions réglées.

Définition 44. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ et $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision adaptée à φ . On définit son intégrale par

$$I(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \varphi(x_i)$$

Théorème 45. $\mathcal{E}([a, b])$ est dense dans $\mathcal{R}([a, b])$ pour la norme infinie.

Corollaire 46. On peut ainsi définir l'intégrale de Riemann pour une fonction réglée.

Remarque 47 : Toute fonction continue par morceaux est réglée, on a alors une intégrale des fonctions continues par morceaux.

Proposition 48 (Somme de Riemann). Soit f une fonction réglée sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

3.2 Vers l'intégrale de Lebesgue

On fixe $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 49. Toute fonction f de la forme $\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec A_i mesurable et I fini est dite simple. On

Théorème 50. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors, il existe une suite de fonctions simples qui converge simplement vers f .

1. Si $f \geq 0$, alors cette suite peut être prise croissante et positive.
2. Si f est bornée, alors cette suite peut être prise de sorte que f_n converge uniformément vers f .

Définition 51. Soit f une fonction simple que l'on écrit $\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, on définit l'intégrale de Lebesgue de f par

$$\int_X f d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i)$$

Pour une fonction mesurable positive, on pose

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu, \varphi \leq f, \varphi \text{ simple} \right\}$$

Théorème 52 (Convergence monotone). Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives, alors elle converge simplement vers une fonction mesurable f . Alors, on a

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

Remarque 53 : On peut étendre la définition de l'intégrale pour les fonctions intégrables, ce qu'on ne détaillera pas dans ce cours. On supposera dans la suite les bases de la théorie de l'intégration connue. On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne complétée et de la mesure de Lebesgue.

Théorème 54 (Riesz-Fischer). Soit $1 \leq p < +\infty$, l'espace L^p muni de la norme $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ est un espace complet.

Théorème 55 (Admis). Soit $1 \leq p < +\infty$. Le sous-espace des fonctions continues à support compact est dense dans L^p .

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 56 (Inégalité de Hardy). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, on note $T_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Alors, $T : f \in L^p(\mathbb{R}_+) \mapsto T_f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ est un opérateur continu. Plus précisément, on a

$$\|T_f\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}$$

De plus, la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale.

3.3 Transformée de Fourier

Définition 57. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$$

On notera $\overline{\mathcal{F}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$.

Proposition 58. $\mathcal{F}$ est un opérateur continu de L^1 vers l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0.

Théorème 59. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))$$

Remarque 60 : Il existe une fonction $f \in L^1$ telle que $\mathcal{F}(f) \notin L^1$. Par exemple, $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ est L^1 , mais pas sa transformée de Fourier.

Théorème 61 (Fourier-Plancherel). L'opérateur $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}$ est une isométrie entre $L^1 \cap L^2$ dans L^2 .

Corollaire 62. On peut prolonger la transformée de Fourier en une transformée de Fourier sur L^2 .

Références :

- Briane, Pagès, Gilles. Théorie de l'intégration.
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.