205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Pandou

2 janvier 2022

On fixe (X,d) un espace métrique.

1 Définition, premières propriétés

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1. *Une suite (x_n) d'éléments de (X,d) est une suite de Cauchy lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$$

Proposition 2. *Si (x_n) est une suite de Cauchy, alors elle est bornée.*

Remarque 3 : La réciproque est fausse : $(-1)^n$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4. *Si (x_n) est une suite convergente, alolrs elle est de Cauchy.*

Remarque 5 : La réciproque est fausse en général. Par exemple, dans $\mathbb{Q}$, $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ est de Cauchy.

Définition 6. *On dit que (X,d) est complet si toute suite de Cauchy de (X,d) converge dans X.*

Remarque 7 : La complétude est une notion métrique et non topologique. Par exemple, si $d(x,y) = \big|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)\big|$, alors $(\mathbb{R}, d)$ et $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont topologiquement équivalents, mais $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Proposition 8. *Si (X,d) et (X,d') sont uniformément équivalentes (ie* Id *: $(X,d) \longrightarrow (X,d')$ et sa réciproque sont uniformément continues), alors (x_n) est de Cauchy dans (X,d) si, et seulement si, elle est de Cauchy dans (X,d').*

1.2 Propriétés topologiques des espaces complets

Proposition 9. *On suppose que (X,d) est complet, soit $A \subset X$ une partie de X, alors on a équivalence entre :*

1. *A est fermé.*
2. *A est complet.*

Application 10 : Tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Proposition 11. *On a équivalence entre :*

1. *(X,d) est complet.*
2. *Toute suite décroissante de fermés non vides F_n tels que* $\mathrm{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ *a une intersection réduite à un point.*

Théorème 12. *Soit (X,d) un espace métrique. Alors, on a équivalence entre :*

1. *X est compact.*
2. *X est complet et précompact, ie pour tout $\varepsilon > 0$, X est recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.*

Théorème 13 (Complété d'un espace métrique)**.** *Soit (X,d) un espace métrique, alors il existe un espace complet $\widehat{X}$ tel que $X \hookrightarrow \widehat{X}$ est une isométrie et X est dense dans $\widehat{X}$.*
De plus, si $\widehat{X}_1$ et $\widehat{X}_2$ sont deux tels espaces complets, alors il existe une isométrie bijective $\varphi : \widehat{X}_1 \longrightarrow \widehat{X}_2$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & \widehat{X}_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ & \widehat{X}_2 \end{tikzcd}$$

Exemple 14 : $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$.

Théorème 15 (Prolongement)**.** *Soit X un espace métrique quelconque et Y un espace métrique complet. Soit A une partie dense de X et $f : A \longrightarrow Y$ uniformément continue, alors f admet un unique prolongement continu $X \longrightarrow Y$, de plus ce prolongement est uniformément continu.*

Application 16 : La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L_1 \cap L_2 \longrightarrow L^2$ est linéaire continue (donc uniformément continue). Comme $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 et que L^2 est complet, alors il existe un unique prolongement linéaire continu $\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow L^2$.

Application 17 : Soit $\mathcal{R}([a,b])$ l'espace des fonctions réglées et $\mathcal{E}([a,b])$ l'espace des fonctions en escaliers sur $[a,b]$. La forme linéaire

$$I : f \in \mathcal{E}([a,b]) \longmapsto \int_a^b f = \sum_i (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

est continue. De plus, $\mathcal{E}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{R}([a,b])$ pour la norme uniforme. Comme ce dernier est complet, on peut prolonger cette forme linéaire en l'intégrale de Riemann pour des fonctions réglées.

1.3 Espaces de Banach

Définition 18. *Un espace normé E est de Banach si E est complet.*

Application 19 : $\mathbb{R}$ est un espace de Banach, $\mathcal{C}^0(K)$ est un espace de Banach muni de la norme uniforme.

Proposition 20. *Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach. En particulier, le dual (topologique) de E, E', est toujours complet, même si E ne l'est pas.*

Théorème 21. *Soit E un espace normé, alors on a équivalence entre :*

1. *E est de Banach.*
2. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Applications 22 :

- L'exponentielle est bien définie.
- Si $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$, alors $\mathrm{Id} - u$ est inversible, d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

  En particulier, $GL_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 23. *Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ une partie de E, alors on a équivalence entre :*

1. *K est compact.*
2. *K est fermé, borné et plat, ie pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace F de dimension finie tel que $K \subset F + B(0,\varepsilon)$.*

Application 24 : Toute partie fermée bornée et équicontinue de $\mathcal{C}^0(K)$ est plat, donc compacte.

2 Théorème du point fixe de Picard

Théorème 25. *Soit X un espace métrique, $k < 1$ et $f : X \longrightarrow X$ une application k-contractante, alors f admet un unique point fixe α.*
De plus, pour tout $x \in X$, la suite $\big(f^n(x)\big)_n$ converge vers α.

Remarque 26 : La vitesse de convergence est géométrique, plus précisément, on a l'estimation

$$d(x_n, \alpha) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Théorème 27 (Picard itéré)**.** *Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ telle que son itérée f^p est contractante. Alors, f admet un unique point fixe $\alpha \in X$. De plus, pour tout $x \in X$, la suite $\big(f^n(x)\big)_n$ converge vers α.*

Application 28 : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1])$ non identiquement égal à 1 et $T : f \in \mathcal{C}^0\big([0,1]\big) \longmapsto \left(x \mapsto \alpha + \displaystyle\int_0^x f \circ \varphi\right)$. Alors, T^2 est contractante.
Alors, il existe une unique $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $\begin{cases} f(0) & = & \alpha \\ f'(x) & = & f \circ \varphi(x) \end{cases}$.

Théorème 29 (Picard paramétrique)**.** *Soit (X,d) un espace métrique complet et Y un espace topologique et $f : X \times Y \longrightarrow X$ continue et tel qu'il existe $k < 1$ tel que*

$$\forall x, x' \in X, \forall y \in Y, d\big(f(x,y), f(x',y)\big) \leqslant d(x,x')$$

Alors, pour tout $y \in Y$, $x \longmapsto f(x,y)$ admet un unique point fixe $\varphi(y)$ et l'application $\varphi : Y \longrightarrow X$ est continue.

Application 29 : Théorème d'inversion locale.

3 Théorème de Baire

Théorème 30. *Soit (X,d) un espace complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Remarque 32 : De façon équivalente, toute union dénobmrable de fermés d'intérieur non vide est d'intérieur vide.

Application 33 : Si $(f_n) : X \longrightarrow Y$ avec X complet est une suite de fonctions convergeant simplement vers f, alorrs l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ-dense.

Application 34 : Un espace normé admettant une base dénombrable n'est jamais complet. En particulier, $\mathbb{R}[X]$, quelle que soit la norme, n'est jamais complet.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 35 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E un Banach et F un espace normé. Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$, alors on a l'alternative :*

1. *$\left(\|f\|\right)_{f\in H}$ est borné.*
2. *Il existe $x \in E$ tel que $\sup\limits_{f\in H} \left\|f(x)\right\| = +\infty$.*

Application 36 : Il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier (preuve non constructiviste).

Corollaire 37. *Soit E un Banach et F un espace normé et (T_n) une suite d'opérateurs linéaires qui converge simplement vers T, alors T est un opérateur linéaire.*

Corollaire 38. *Soit E_1 un Banach, E_2 et F deux espaces normés et $B : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ une application bilinéaire dont les applications partielles sont continues, alors B est continue.*

Théorème 39 (Application ouverte)**.** *Soit E et F deux Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire surjectif, alors T est une application ouverte.*

Corollaire 40. *Soit E et F deux Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire bijectif, alors T^{-1} est aussi un opérateur.*

Théorème 41 (Graphe fermé)**.** *Soit E et F deux Banach et $T : E \longrightarrow F$ linéaire. Alors, T est continue si, et seulement si, le graphe de T est fermé.*

Références :

- Brézis, Analyse fonctionnelle.
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Quéffelec, Topologie