204 : Connexité. Exemples et applications.

Pandou

3 avril 2022

1 Espaces connexes

1.1 Définitions et premières propriétés

Théorème-Définition 1. *Soit X un espace topologique. On a équivalence entre :*

1. *X ne se partitionne pas en deux ouverts disjoints non vides.*
2. *X ne se partitionne pas en deux fermés disjoints non vides.*
3. *Les seuls ouverts-fermés de X sont $\emptyset$ et X.*

Dans ce cas, on dit que X est connexe.

Application 2 : Tout espace vectoriel normé réel est connexe, mais $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

Proposition 3. *X est connexe si, et seulement si, toute application continue $X \longrightarrow \{0,1\}$ est constante.*

Application 4 : Soit g_1 et g_2 deux fonctions continues $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $e^{g_1} = e^{g_2}$, alors $g_1 - g_2$ est constante : deux relèvements continus d'une fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ diffèrent d'une constante.

Proposition 5. *Soit X un espace topologique et A une partie connexe de X. Alors,*

1. *L'adhérence $\overline{A}$ est connexe.*
2. *Toute image continue de A est connexe.*

Application 6 : Soit $f : x \in]0,1] \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, alors le graphe Γ de f est connexe et $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \big(\{0\} \times [-1,1]\big)$ est connexe. (Voir figure 1).

Proposition 7. *Soit X un espace topologique, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X.*

1. *$\displaystyle\prod_{i\in I} A_i$ est une partie connexe de X^I.*
2. *Si $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*
3. *Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $\forall i, A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe. (Voir figure 2).*

Théorème-Définition 8. *Soit X un espace topologique, on définit une relation d'équivalence sur X en posant*

$$x \sim y \iff \text{Il existe un connexe de } X \text{ contenant } x \text{ et } y.$$

Un élément de $X/\sim$ est appelé une composante connexe de X.

Proposition 9. *Les composantes connexes de X sont fermées dans X.*

1.2 Connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 10. *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Corollaire 11 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Applications 12 :

- Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ admet un point fixe.
- Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

Proposition 13. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est injective si, et seulement si, f est strictement monotone.*

Théorème 14. *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints.*

Application 15 : Tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.3 Connexité par arcs

Définition 16. *Soit $a, b \in X$. On dit que a et b sont joignables par un arc s'il existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continu tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*
Si toute paire de points de X sont joignables par un arc, on dit que X est connexe par arcs.

Proposition 17. *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

Remarque 18 La réciproque est fausse. On pourra montrer que $\overline{\Gamma}$ de l'exemple 6 n'est pas connexe par arcs. (Voir figure 1).

Proposition 19. *Soit A une partie connexe par arcs et $f : X \longrightarrow Y$ continue, alors $f(A)$ est encore connexe par arcs.*

Remarque 20 : Par contre, le passage a l'adhérence n'est plus valable comme le montre la remarque 15. Par contre la proposition 7 reste vraie pour les espaces connexes par arcs.

Exemples 21 : La connexité par arcs est souvent plus simple à établir que la connexité. En voici quelques applications :

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une surjection continue, alors $f^{-1}(a)$ n'est borné pour aucun $a \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe (par arcs).
- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. $[0,1]$ et $\mathbb{S}^1$ sont deux courbes non homéomorphes.
- $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est connexe par arcs si, et seulement si, $n \geqslant 1$.

Théorème 22. *Soit X un espace normé et U un ouvert connexe de X, alors U est connexe par arcs.*

2 Utilisation de la connexité

2.1 En calcul différentiel

Théorème 23. *Soit X connexe et f une fonction localement constante sur X, alors f est constante sur X.*

Corollaire 24. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur U ouvert connexe, alors f est constante sur U si, et seulement si, $\forall x \in U, \mathrm{d}f(x) = 0$.*

Théorème 25 (Unicité de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors, il existe au plus une solution au problème de Cauchy* $\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & f(t,y) \\ y(0) & = & y_0 \in \mathbb{R}^N \end{array} \right.$.

Proposition 26. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$, alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.*

2.2 En analyse complexe

Théorème 27. $\exp : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{it} \in U(1)$ *est surjective, où on a défini* $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Définition 28. *Soit γ une courbe fermée $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $a \in \mathbb{C}$, on définit l'indice de γ par rapport à a.*

$$\mathrm{Ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a}$$

Proposition 29. *$a \longmapsto \mathrm{Ind}_a(\gamma)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(\gamma)$ et c'est toujours un entier.*

Application 30 : Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 31 (Unicité du prolongement analytique)**.** *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ une fonction holomorphe. Si $f^{-1}(0)$ a un point d'accumulation dans Ω, alors f est identiquement nulle.*

Application 32 : Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ vérifie $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, alors $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z^2$.

DEVELOPPEMENT 1

Définition 33. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe où D est un disque ouvert et $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe. Un prolongement de f le long de γ est une famille de couples $(f_t, D_t)_{t \in [0,1]}$ où f_t est holomorphe sur D_t et D_t un disque ouvert telle que*

1. *$(f_0, D_0) = (f, D)$.*
2. *Pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est le centre de D_t.*
3. *Pour tout $t \in [0,1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|t - t'| < \varepsilon$, $\gamma(t') \in D_t \cap D_{t'}$ et $f_{t'} = f_t$ sur $D_t \cap D_{t'}$.*

(Voir figure 3).

Proposition 34. *Si (f_1, D_1) et $(\widetilde{f}_1, \widetilde{D}_1)$ sont les extrémités de deux prolongements analytiques le long de γ, alors $f_1 = \widetilde{f}_1$ sur $D_1 \cap \widetilde{D}_1$.*

Remarque 35 : On n'a pas toujours existence d'un prolongement. Par exemple, on n'a pas de prolongement de la détermination principale de la racine carrée de 1 à -1. (Voir figure 5).

Définition 36. *On dit que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue est sous-harmonique lorsque pour tout $a \in \Omega$, il existe $R > 0$ tel que*

$$\forall r \in [0, R], f(a) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

Théorème 37. *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ sous-harmonique et continue sur $\overline{\Omega}$ avec Ω borné. Alors, f vérifie le principe du maximum, ie*

$$\sup_{\overline{\Omega}} f = \sup_{\partial\Omega} f$$

Application 38 : Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors

$$\|P'\|_{\infty,\overline{D(0,1)}} \leqslant n\|P\|_{\infty,\overline{D(0,1)}}$$

3 Groupes de matrices

Définition 39. *Un groupe topologique est un groupe G tel que la multiplication $G \times G \longrightarrow G$ et l'inverse $G \longrightarrow G$ soient continus.*

Exemples 40 : Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $O_n(K)$, $SO_n(K)$, $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$ sont des groupes topologiques.

Proposition 41.
- *$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe (par arcs).*
- *Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.*
- *$SL_n(K)$ est connexe par arcs pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
- *$SO_n(\mathbb{R})$ et $SU_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.*

Application 42 : L'ensemble des projecteurs de rang p de $M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est connexe.

Application 43 : L'ensemble des matrices cycliques de $M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ouvert connexe.

Proposition 44. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.*

Application 45 : $PSL_n(\mathbb{C})$ et $PSU_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

Proposition 46 (Admis)**.** *Les retournements engendrent $SO(3)$.*

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 47. *Soit G un groupe topologique et G_0 la composante connexe de 1. Alors, G_0 est un sous-groupe fermé et distingué dans G.*

Théorème 48. *$SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Remarque 49 : Plus généralement, $SO_{2n+1}(\mathbb{R})$ et $PSO_{2n}(\mathbb{R})$ est simple, sauf $PSO_4(\mathbb{R})$.

Proposition 50. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G, si H est ouvert, alors H est fermé.*

Corollaire 51. *Si G est connexe, alors G est engendré par tout voisinage de 1.*

Théorème 52. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors $\exp$ induit un homéomorphisme entre $\mathbb{C}[A]$ et $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.*

Proposition 53. *Soit $p \geqslant 1$, alors la quadrique*

$$\mathcal{Q} = \left\{(x_1, ..., x_p, y) \in \mathbb{R}^{p+1}, x_1^2 + ... + x_p^2 - y^2 = -1\right\}$$

est homéomorphe à $\mathbb{R}^p \times \{-1, 1\}$, en particulier n'est pas connexe. (Voir figure 4).

Corollaire 54. *$SO(p, 1)$ n'est pas connexe.*

Théorème 55 (Admis)**.** *Les sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$, dont le plan tangent en l'identité est*

$$\mathfrak{g} = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in G\right\}$$

Remarque 56 : Tous les groupes de l'exemple 40 sont aussi des sous-variétés. En particulier, $SL_2(\mathbb{C})$ et $SO_0(3, 1; \mathbb{R})$ des sous-variétés de dimension 4 et

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{X \in M_2(\mathbb{C}), \mathrm{Tr}(X) = 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{so}_0(3, 1) = \left\{X \in M_4(\mathbb{R}), X^T I_{3,1} + I_{3,1} X = 0\right\}$$

où $I_{3,1} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$.

DEVELOPPEMENT 3

Lemme 57.
1. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $AHA^* = H$ pour tout $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors A est une homothétie.*
2. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $MH + HM^* = 0$ pour tout $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors $M = 0$.*

Théorème 58.

$$PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_0(3, 1; \mathbb{R})$$

où $SO_0(3, 1)$ est la composante connexe de $SO(3, 1)$ contenant l'identité, appelé groupe orthochrone restreint.

Remarque 59 : En examinant de bonnes actions (comme dans le théorème 58), on a d'autres isomorphismes exceptionnels :

$$PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{C}), \qquad PSL_2(\mathbb{R}) \simeq SO_0(2, 1) \qquad \text{et} \qquad PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$$

4 Annexe

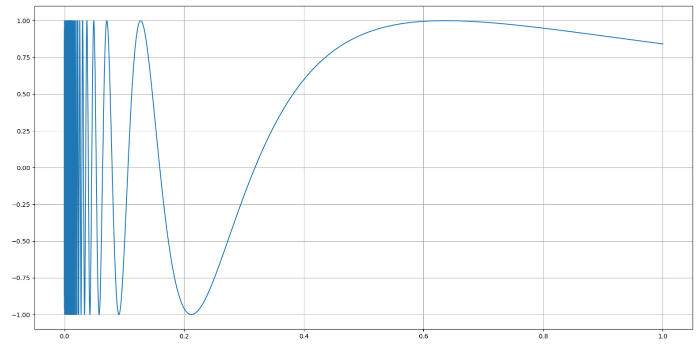

Figure 1 – Connexe non connexe par arcs de la remarque 18.

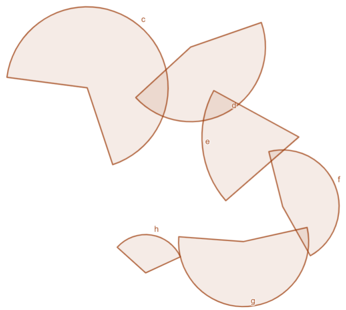

Figure 2 – Connexes “en chaîne”.

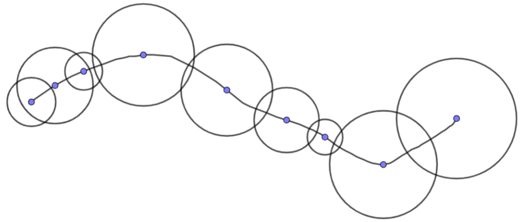

Figure 3 – Prolongement analytique le long d’une courbe

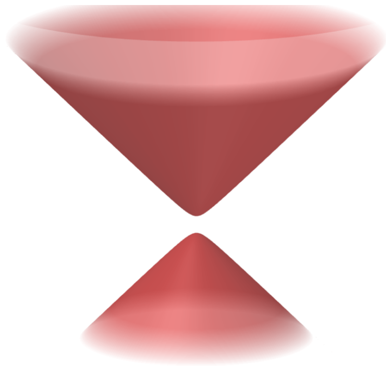

Figure 4 – Quadrique d’équation $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

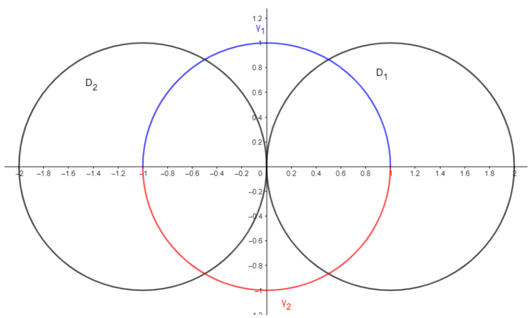

Figure 5 – Différents prolongements

Références :

- Caldero-Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome 1.
- Chabat, Introduction à l'analyse complexe, Tome 1.
- FGN, Algèbre 3, Analyse 1, Analyse 3.
- Gourdon, Analyse.
- Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques.
- Mneimé-Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Quéffelec-Zuily, Topologie.
- Rudin, Analyse réelle et complexe.
- Zavidovique, Un max de math.