203 : Utilisation de la notion de compacité.

Pandou

3 mai 2022

On ne considèrera que des espaces métriques.

1 Rappels sur la compacité

1.1 Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 1. *On dit qu'un espace métrique X est compact lorsque de tout recouvrement ouvert de X, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.*

Exemples 2 :
- Tout espace métrique fini est compact.
- $\mathbb{R}$ n'est pas compact.
- Si (x_n) est une suite convergente vers x, alors $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de X.

Proposition 3. *Toute partie compacte est bornée.*

Proposition 4. *Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides d'un compact X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Remarque 5 : Si X n'est pas compact, le résultat est faux : $X = \mathbb{R}$ et $F_n = [n, +\infty[$.

Application 6 : (Théorème de Dini) Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f continue sur un compact X. On suppose que $f_n \leqslant f_{n+1}$, alors la convergence est uniforme.

Proposition 7.
1. *Une réunion finie de compacts est compacte.*
2. *Une intersection de compacts est compacte.*
3. *Un produit de compacts est compact.*

Théorème 8. *Le segment $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$.*

Application 9 : L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est dense dans l'ensemble des fonctions réglées sur $[a, b]$ pour la norme infinie. Ceci permet en particulier d'étendre l'intégrale de Riemann aux fonctions réglées.

1.2 Propriété de Weierstrass

Théorème 10. *Soit X compact, alors de toute suite d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Corollaire 11. *Toute partie compacte est fermée et bornée.*

Corollaire 12. *Toute suite d'éléments de X compact admet au moins une valeur d'adhérence.*

Lemme 13 (Lebesgue)**.** *Si de toute suite de X, on peut extraire une sous-suite convergente, alors pour tout recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i\in I}$ de X, il existe $\rho > 0$ tel que $\forall x \in X, B(x, \rho)$ est contenu dans l'un des Ω_i.*

Théorème 14. *X est compact si, et seulement si, de toute suite de points de X, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Corollaire 15. *Une partie fermée d'un compact est compacte.*

Proposition 16. *Tout espace compact est complet.*

Définition 17. *On dit que X est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε.*

Théorème 18. *On a équivalence entre :*
1. *X est compact.*
2. *X est précompact et complet.*

2 Applications continues sur un compact

2.1 Cas général

Théorème 19. *Soit X un compact et Y un espace métrique, si $f : X \longrightarrow Y$ est continue, alors $f(X)$ est compacte.*

Application 20 : Soit K une partie compacte d'un espace métrique E, alors

1. Il existe $x \in K$ tel que $d(y,K) = d(x,y)$.
2. Il existe $a, b \in K$ tels que $d(a,b) = \mathrm{diam}(K)$.

Corollaire 21. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une bijection continue avec X compact, alors f est un homéomorphisme.*

Définition 22. *On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x,y) < \eta \Longrightarrow d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

Théorème 23 (Heine)**.** *Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue avec X compact, alors f est uniformément continue.*

(Contre)-exemples 24 :

- $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
- $x \longmapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction continue périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Application 25 : Si f est continue sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) \mathrm{d}t$$

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 26. *Soit K un compact et $f : K \longrightarrow K$ continue telle que*

$$\forall x \neq y, d\big(f(x), f(y)\big) < d(x,y)$$

Alors, f admet un unique point fixe $\alpha \in K$ et pour tout $x \in K$, la suite $\big(f^n(x)\big)$ converge vers α.

Remarque 27 : Contrairement au cas contractant du point fixe de Picard, la convergence n'est plus géométrique. Typiquement :

$$f : x \in [0,1] \longmapsto x - x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right) \in [0,1]$$

donne une convergence en $\dfrac{1}{\ln(n)}$.

2.2 Analyse réelle

Théorème 28. *Toute bijection continue entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un homéomorphisme.*

Théorème 29. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les fermés bornés.*

Théorème 30. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème 31 (Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui est dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Corollaire 32 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Corollaire 33 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. On considère un réel M tel que $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant M$, alors*

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leqslant M|b-a|$$

3 Compacité dans les espaces vectoriels normés

3.1 Dimension finie

Définition 34. *On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes α et β telles que*

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

Théorème 35. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace normé de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Remarque 36 : En particulier, il n'y a qu'une seule topologie d'espace normée sur un espace de dimension finie.

Théorème 37. *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.*

Application 38 : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty = d(f, \mathbb{R}_n[X])$.

Théorème 39. *Un $\mathbb{R}$-espace normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Théorème 40. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace normé de dimension finie, alors toute application linéaire partant de E est continue.*

Théorème 41 (Riesz)**.** *La boule unité de E est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie.*

3.2 Espaces de Banach

Théorème 42. *Soit X un compact, alors $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ muni de la norme infinie est un espace de Banach.*

Définition 43. *Soit A une partie de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ est séparante si pour tout $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

Théorème 44 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ séparante qui contient les constantes, alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$.*

Corollaire 45. *$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.*

Application 46 : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall k, \displaystyle\int_0^1 x^k f(x) \mathrm{d}x = 0$, alors $f = 0$.

Définition 47. *Soit H une partie de $\mathcal{C}^0(X)$. On dit que*

1. *H est équicontinue en $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in B(x, \eta), \forall h \in H, \left|h(x) - h(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

2. *H est équicontinue si elle est continue en tout $x \in X$.*
3. *H est uniformément équicontinue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x,y) \leqslant \eta \Longrightarrow \forall h \in H, \left|h(x) - h(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 48. *Si X est compacte, alors une partie de $\mathcal{C}^0(X)$ est équicontinue si, et seulement si, elle est uniformément équicontinue.*

Exemples 49 :
- Toute partie finie de $\mathcal{C}^0(X)$ est équicontinue.
- Une suite convergente de $\mathcal{C}^0(X)$ forme une partie équicontinue.
- L'ensemble des fonctions K-lipschitziennes (K fixé) est équicontinue.

Théorème 50 (Ascoli)**.** *Une partie de $\mathcal{C}^0(X)$ est relativement compacte si, et seulement si, elle est bornée et équicontinue.*

Application 51 : (Théorème de Cauchy-Péano-Arzela) Soit $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$ et $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Alors, le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & f\big(t, x(t)\big) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$ admet une solution définie au voisinage de t_0.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 52. *Soit K une partie d'un espace de Banach E. Alors, on a équivalence entre :*

1. *K est compact.*
2. *K est fermé, borné et plat, ie pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F un sous-espace de dimension finie telle que $K \subset F + B(0, \varepsilon)$.*

Application 53 : Ceci fournit une preuve alternative du théorème d'Ascoli.

Proposition 54. *Soit K un compact dans un espace normé réel de dimension infinie, alors $E \setminus K$ est connexe par arcs.*

3.3 Théorème de Montel

Définition 55. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une suite exhaustive de compacts de Ω est une famille de compacts (K_n) telle que*

$$K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

Remarque 56 : La famille $K_n = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant n, d(z, \Omega^c) \geqslant \dfrac{1}{n} \right\}$ est une suite exhaustive de compacts de Ω.

Théorème 57. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f, alors f est holomorphe.*

Théorème 58. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{H}(\Omega)$ muni de la topologie de convergence uniforme sur tout compact. Alors, on a équivalence entre*

1. *$\mathcal{A}$ est bornée sur tout compact de Ω, ie pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $M > 0$ telle que $\forall f \in \mathcal{A}, \|f\|_{\infty,K} \leqslant M$.*
2. *$\mathcal{A}$ est relativement compacte.*

Application 59 : La topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas normée.

Application 60 : Les compacts de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont exactement les fermés bornés.

Références :

- Gourdon, Analyse.
- Hirsch, Éléments d'analyse fonctionnelle.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Quéfflec, Topologie.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.