201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Pandou

19 mai 2022

1 Espace $\mathcal{C}^0(K)$

1.1 Quelques sur la continuité

Théorème 1. *Soit K un compact et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors, $f(K)$ est compact.*

Remarque 2 : En particulier, toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 3 (Heine)**.** *Soit K un compact et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est uniformément continue.*

Proposition 4. *$\mathcal{C}^0(K)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre associative unitaire de dimension infinie. On le munit d'une norme en posant $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in K} \big|f(x)\big|$.*

1.2 Convergence uniforme

Théorème 5. *$\big(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty\big)$ est un espace de Banach séparable.*

Remarque 6 : En particulier, la limite uniforme de fonctions continues est continue.

Proposition 7. *Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^0(K)$ qui converge simplement vers une fonction f continue.*

1. *Si (f_n) est une suite croissante, ie $f_n \leqslant f_{n+1}$, alors la convergence est uniforme.*
2. *Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ est croissante, alors la convergence est uniforme.*

Exemple 8 : La suite de polynômes définie par $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{1}{2}\big(x^2 - P_n(x)^2\big)$ converge uniformément vers $x \longmapsto |x|$.

Remarque 9 : L'hypothèse de continuité de la limite simple est primordiale, par exemple $x \longmapsto x^n$ sur $[0,1]$ donne un contre-exemple. ;

Théorème 10 (Weierstrass)**.** *$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$.*

Application 10 : Si f est continue, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{2i\pi nt}\mathrm{d}t = 0$.

Remarque 11 : On a même une suite explicite : si $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$, on pose $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$, alors $\big(B_n(f)\big)$ converge uniformément vers f.

Théorème 12 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(K)$ qui contient les constantes et qui est séparante, ie si $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*
Alors, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(K)$.

Définition 13. *Soit H une partie de $\mathcal{C}^0(K)$, on dit que H est*

1. *équicontinue si $\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, d(x,y) < \eta \Longrightarrow \forall h \in H, \big|h(x) - h(y)\big| \leqslant \varepsilon$.*
2. *uniformément équicontinue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x,y \in K, d(x,y) < \eta \Longrightarrow \forall h \in H, \big|h(x) - h(y)\big| \leqslant \varepsilon$.*

Proposition 14. *Comme K est compact, H est équicontinue si, et seulement si, elle est uniformément équicontinue.*

Théorème 15 (Ascoli)**.** *Soit H une partie de $\mathcal{C}^0(K)$, alors on a équivalence entre :*

1. *H est relativement compacte.*
2. *H est bornée et équicontinue.*

Remarque 16 : L'ensemble des fonctions k-lipschitziennes est équicontinue. On en déduit que si (f_n) est une suite de fonctions continues de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telles que (f_n) et (f_n') sont uniformément bornées, alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge uniformément.

Application 17 : (Théorème de Cauchy-Peano) Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], \forall t \in \mathbb{R}, \big|f(t,x)\big| \leqslant M\big(1+|x|\big)$. Alors, la méthode d'Euler donne une solution au problème de Cauchy $\begin{cases} \phi'(t) &= f\big(t,\phi(t)\big) \\ \phi(0) &= 0 \end{cases}$.

2 Fonctions L^p

On fixe $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

2.1 Généralités

Définition 18. *Soit $p > 0$. On note $\mathcal{L}^p(\mu)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que $\int_X |f|^p < +\infty$. On note $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.*
On note $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que $\inf\{M > 0, \mu(f > M) = 0\} < +\infty$, on note cette quantité $\|f\|_\infty$.
Pour $p \in [0, +\infty]$, on note $L^p(\mu)$ le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'égalité μ-presque partout.

Théorème 19 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1(\mu)$ et*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

avec égalité si, et seulement s'il existe λ, μ tels que $\lambda|f|^p = \mu|g|^q$ presque partout.

Corollaire 20 (Minkowski)**.** *Si $p \in [1, +\infty]$, alors $L^p(\mu)$ est un espace normé.*

Théorème 21 (Riesz-Fischer)**.** *Si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, alors $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.*

Corollaire 22. *Si (f_n) est une suite d'éléments de L^p qui converge vers f dans L^p, alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge presque partout.*

Remarque 23 : On a pas nécessairement de (f_n) presque partout : $f_{2^n+k} = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$ converge vers 0 dans L^p, mais si (k_n^x) est la décomposition dyadique de x, alors $f_{2^n+k_n^x}(x) = 1$.

Application 24 : (Théorème de prolongement) Tout opérateur linéaire continu sur une partie dense D de L^p se prolonge en un unique opérateur linéaire sur L^p.

2.2 Résultats de densité

Proposition 25. *Si $p \in [1, +\infty]$, l'espace des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$.*

Théorème 26 (Admis)**.** *L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.*

Proposition 27. *Si $1 \leqslant p < +\infty$, alors $L^p(\mathbb{R})$ est séparable, mais $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.*

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 28 (Inégalité de Hardy)**.** *Soit $p > 1$, si $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, on pose $Tf : x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Alors, T est un opérateur continu sur $L^p(\mathbb{R}_+)$. De plus, on a*

$$\|Tf\|_{L^p} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}$$

De plus, la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale.

2.3 Convolution et régularisation

Définition 29. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, on définit une fonction pour presque tout x par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$.*

Proposition 30. *Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $f * g \in L^p$ et*

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$$

Proposition 31. *Si f est $\mathcal{C}_c^k$ et $g \in L^1_{loc}$, alors $f * g$ est $\mathcal{C}^k$.*

Proposition 32. *Si $1 \leqslant p < +\infty$ et $f \in L^p$, alors $a \in \mathbb{R} \longmapsto \tau_a f \in L^p$ est uniformément continue.*

Définition 33. *Une approximation de l'unité est une suite de fonctions intégrables (ρ_n) telles que*

1. *Pour tout n, $\rho_n \geqslant 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1$.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|x|>\varepsilon} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 0$.*

Si de plus, (ρ_n) est $\mathcal{C}^\infty$, on dit que (ρ_n) est régularisante.

Exemples 34 :

- $\rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ est une approximation de l'unité.
- $\rho_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{t^2 + x^2}$ est une approximation de l'unité.
- Si ρ est une fonction positive $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on a une suite régularisante en posant $\rho_n(x) = n\rho(nx)$.

Proposition 35. *Soit $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p$ et (ρ_n) une approximation de l'unité, alors $\rho_n * f \longrightarrow f$ dans L^p.*
Si de plus, f est continue, alors la convergence est uniforme sur tout compact.

Corollaire 36. *$\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L^p pour $1 \leqslant p < +\infty$.*

Théorème 37. *Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et H une partie de L^p. Alors H est relativement compact si, et seulement si, on a les critères suivants :*

1. *H est borné dans L^p.*
2. $\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|>R} |f(x)|^p \mathrm{d}x = 0$ *uniformément par rapport à $f \in H$.*
3. $\lim_{a\to 0} \tau_a f = f$ *dans L^p uniformément pas rapport à $f \in H$.*

2.4 Transformée de Fourier

Définition 38. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par*

$$\mathcal{F}(f) : \xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x$$

Proposition 39. *Soit $f, g \in L^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, on a alors*

$h(x)$	$\mathcal{F}(h)(x)$
$f(x)e^{i\alpha x}$	$\mathcal{F}(g)(\xi-\alpha)$
$f(x-\alpha)$	$\mathcal{F}(f)(\xi)e^{-i\alpha\xi}$
$f * g$	$\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
$\overline{f(-x)}$	$\overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$
$f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$	$\lambda\mathcal{F}(f)(\lambda\xi)$

Proposition 40. *$\mathcal{F}$ est un opérateur continu de L^1 vers l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. On a même $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.*

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 41. *Si $f_a(x) = e^{-ax^2}$, alors*

$$\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Théorème 42 (Inversion de Fourier)**.** *Si $f \in L^1$ telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1$, alors*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}x$$

Remarque 43 : Si $\mathcal{F}(f) \in L^1$, alors f est continue, on ne peut donc a priori pas calculer l'inverse de Fourier autre que des fonctions continues.

Corollaire 44. *$\mathcal{F}$ est injective.*

Théorème 45 (Fourier-Plancherel)**.** *Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\mathcal{F}(f) \in L^2$. De plus, on a $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.*

Corollaire 46. *Comme $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2, cela définit $\mathcal{F}$ sur tout L^2.*

Exemple 47 : Calcul des transformées de Fourier du sinus cardinal et des indicatrices.

3 Espaces de Sobolev en dimension 1

3.1 Généralités

Définition 48. *Soit $I =]a, b[$ éventuellement non borné, on pose*

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I), \exists g \in L^2(I), \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I), \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \right\}$$

Remarque 49 : Si $u \in L^2(I)$, on notera u' sa dérivée au sens des distributions, ie telle que $\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle$.

Théorème 50. *L'espace $H^1(I)$ muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2}$ est un espace de Hilbert séparable.*

Théorème 51. *On a une injection continue $H^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{I})$. En particulier, tout élément de $H^1(I)$ admet un unique représentant continu.*
Cette injection est même compacte, ie l'image de la boule unité de $H^1(I)$ dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$ est relativement compacte.

Définition 52. *On note $H_0^1(I)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans $H^1(I)$ pour la norme H^1.*

Théorème 53. *Soit $u \in H^1(I)$, alors $u \in H_0^1(I)$ si, et seulement si, $u(a) = u(b) = 0$.*

Théorème 54 (Inégalité de Poincaré)**.** *On suppose que I est borné, alors il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in H_0^1(I), \|u\|_{H^1} \leqslant C\|u'\|_{L^2}$$

3.2 Résolution d'EDP

Théorème 55 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert, b une forme bilinéaire continue coercive sur H et ℓ une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, b(u, v) = \ell(v)$$

De plus, si b est symétrique, alors u est l'unique minimiseur de $x \longmapsto \frac{1}{2}b(x,x) - \ell(x)$.

Définition 56. *Soit (E_1) : $\left\{ \begin{array}{rcl} -u'' + u & = & f \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{array} \right.$, une solution faible de (E_1) est un élément $u \in H_0^1(I)$ telle que*

$$\forall v \in H_0^1(I), \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv$$

Théorème 57. *Si $f \in L^2$, il existe une unique solution faible de (E_1). De plus, si f est continue sur $\overline{I}$, alors u est $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{I}$.*

Définition 58. *Soit* $(E_2) : \begin{cases} -(pu')' + qu &= f \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases}$ *, une solution faible de* (E_2) *est un élément de* $u \in H_0^1(I)$ *telle que*

$$\forall v \in H_0^1(I), \int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv$$

Théorème 59. *On suppose que* $f \in L^2$, $p \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ *telle que* $p \geqslant \alpha > 0$ *et* $q \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$, *alors* (E_2) *a une unique solution faible. Si de plus, f est continue, alors u est* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\overline{I}$.

Remarque 60 : La définition de formulation faible et donc le choix de l'espace de Hilbert est primordial :

- Pour $\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu &= f \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases}$, on travaille dans $H_0^1(I)$.
- Pour $\begin{cases} -u'' + u &= f \\ u'(0) = u'(1) &= 0 \end{cases}$, on travaille dans $H^1(I)$.
- Pour $\begin{cases} -u'' + u &= f \\ u(0) &= u(1) \\ u'(0) &= u'(1) \end{cases}$, on travaille dans $H = \{v \in H^1(I), v(0) = v(1)\}$.

4 Espaces de fonctions lisses

On fixe Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.

4.1 Espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$

Lemme 61. *On note* $K_i = \left\{x \in \Omega, |x| \leqslant i, d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{i}\right\}$. *Alors,*

1. *K_i est une exhaustion compacte de Ω, ie $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ et* $\Omega = \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$.
2. *Pour tout compact K de Ω, il existe i tel que $K \subset K_i$.*

Définition 62. *Pour* $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, *on note* $p_i(f) = \sum_{j=1}^{i} \|f^{(j)}\|_{\infty, K_i}$ *et on définit une distance sur* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *en posant*

$$d(f,g) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(f-g)}{1 + p_i(f-g)}$$

Théorème 63. $(\mathcal{C}^k(\Omega), d)$ *est un espace métrique complet. De plus, on a* (f_n) *converge vers f dans* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *si, et seulement si, pour tout jk,* $\left(f_n^{(j)}\right)$ *converge uniformément sur tout compact vers* $f^{(j)}$.

Proposition 64. *La topologie de* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *n'est pas normée.*

Définition 65. *On dit qu'une partie X de* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *est bornée si*

$$\forall i \geqslant 1, \exists M_i > 0, \forall f \in B, p_i(f) \leqslant M_i$$

Théorème 66. *Les fermés bornés de* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *sont compacts.*

4.2 Espace $\mathcal{H}(\Omega)$

Définition 67. *On rappelle que f est holomorphe sur Ω si f est $\mathcal{C}^1$ sur U et $\mathbb{C}$-dérivable. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes.*

Théorème 68 (Cauchy)**.** *On suppose que Ω est convexe. On considère un cercle $C(a,R) \subset \Omega$ et $r < 0$, alors*

$$\forall b \in C(a,r), f(b) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Corollaire 69. *Toute fonction holomorphe est analytique.*

Définition 70. *On munit* $\mathcal{H}(\Omega)$ *de la distance* $d(f,g) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \|f-g\|_{\infty, K_i}$.

Théorème 71. $\mathcal{H}(\Omega)$ *est un espace métrique complet. De plus,* (f_n) *converge vers f dans* $\mathcal{H}(\Omega)$ *si, et seulement si,* (f_n) *converge uniformément vers f sur tout compact.*

DEVELOPPEMENT 3

Théorème 72 (Montel)**.** *Soit A une partie de $\mathcal{H}(\Omega)$ que l'on munit de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω. Alors, on a équivalence entre :*

1. *A est bornée sur tout compact, ie pour tout compact K de Ω, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $f \in A$, $\|f\|_{\infty,K} \leqslant M$.*
2. *A est relativement compacte.*

Application 73 : La topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω de $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas normée.

Remarque 74 : Les fermés et bornés de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont bornés.

Références :

- Bony, Théorie des distributions et analyse de Fourier.
- Brézis, Analyse fonctionnelle.
- Briane, Pagès, Gilles, Théorie de l'intégration.
- Hirsch, Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.
- Rudin, Analyse réelle et complexe.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.