181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications

Pandou

14 mai 2022

On fixe E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

1 Barycentres et géométrie affine

1.1 Barycentres

Théorème 1. *Soit $A_1, ..., A_k \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, on note $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. On fixe une origine O de $\mathcal{E}$ et on pose*

$$\varphi : M \in \mathcal{E} \longmapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{A_i M} \in E$$

Alors, on a l'alternative :

1. *Si $\lambda = 0$, alors φ est constante à $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{A_i O}$.*
2. *Sinon, il existe un unique $G \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(G) = 0$.*

Le point G est caractérisé par les deux propriétés équivalentes :

1. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.
2. $\lambda \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.

En particulier, G ne dépend pas du point O choisi initialement.

Définition 2. *Un point pondéré est un couple $(A, \lambda) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_k$ tels que $\sum \lambda_i \neq 0$ et $A_1, ..., A_k \in \mathcal{E}$.*
Le point G défini dans le théorème précédent est appelé barycentre de la famille de points $\{(A_i, \lambda_i), 1 \leqslant i \leqslant k\}$.
Si les λ_i sont tous égaux, on dit que G est l'isobarycentre.
L'application $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow E$ est un isomorphisme d'espaces affines.

Remarque 3 :
- Soit $A, B \in \mathcal{E}$ distinct, l'isobarycentre de A et B est appelé milieu de A et B.
- Soit (ABC) un vrai triangle, l'isobarycentre de ses sommets est appelé le centre de gravité.
- Soit $A, B \in \mathcal{E}$ distincts, l'ensemble des barycentres entre A et B est la droite affine (AB).

Remarque 4 : $(O, e_1, ..;, e_n)$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$, on note $y_1, ..., y_n$ les coordonnées de G, alors si $\sum_i \lambda_i = 1$, alors on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & \lambda_1 a_{1,1} + ... + \lambda_k a_{1,k} \\ & \vdots & \\ y_n & = & \lambda_1 x_{n,1} + ... + \lambda_k x_{n,k} \end{array} \right.$$

Théorème 5 (Assocativité du barycentre)**.** *On considère $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$. On considère une partition $I = \bigsqcup_{p=1}^{r} I_p$ de I. On suppose que chaque $\mu_p = \sum_{i \in I_p} \lambda_i \neq 0$, on note G_p le barycentre des $\{(A_i, \lambda_i), i \in I_p\}$.*
Alors, le barycentre des $\{(A_i, \lambda_i), i \in I\}$ est le barycentre des points $\{(G_p, \mu_p), 1 \leqslant p \leqslant r\}$.

Exemple 6 : Soit (ABC) un vrai triangle, alors G est le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$. Soit I le milieu de $[B,C]$, par associativité, G est le barycentre de $\{(I,2),(A,1)\}$, d'où

$$3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AI}$$

Conséquence : les médianes d'un triangle sont concourantes au point G.

1.2 Barycentres et structure affine

Définition 7. *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, on dit que f est affine s'il existe $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que*

$$\forall M \in \mathcal{E}, \forall x \in E, f(M+x) = f(M) + u(x)$$

Remarque 8 : L'application linéaire u de la définition est unique, on la note u_f.

Théorème 9. *L'application $f \longmapsto u_f$ est surjective. Plus précisément, si $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$, il existe une unique application affine f telle que $f(A) = B$ et $u_f = v$. Elle est définie par*

$$\forall M \in \mathcal{E}, f(M) = B + u(\overrightarrow{AM})$$

Exemple 10 : Cela signifie que si on a fixé un repère de $\mathcal{E}$ et un repère de $\mathcal{F}$ d'origine O_F, alors toute application affine est de la forme $O_F + Ax + b$ où b est un vecteur colonne et A une matrice.

Proposition 11. *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$, alors f est affine si, et seulement si, pour toute famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ de points pondérés de $\mathcal{E}$ telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, l'image du barycentre de $\{(A_i,\lambda_i), i \in I\}$ est le barycentre de $\{f(A_i), \lambda_i, i \in I\}$.*

Remarque 12 : Il suffit même que f conserve le barycentre de 3 points.

Remarque 13 : Si f est un isomorphisme et permute les points $A_1, ..., A_k \in \mathcal{E}$, alors f fixe l'isobarycentre de ces points.

Définition 14. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, on rappelle qu'un sous-espace affine de direction F est une orbite pour l'action de F sur $\mathcal{E}$ (obtenue par restriction).*

Remarque 15 : Soit $A \in \mathcal{E}$, il existe même un unique sous-espace affine passant par A et de direction F : $\{A + x, x \in F\}$.

Proposition 16. *Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{F}$. Alors, $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $\left\{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 17. *Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de E, alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si, et seulement si, tout barycentre de points pondérés de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.*

Corollaire 18. *Soit X une partie non vide de $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ engendré par X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés de X.*

Exemple 19 : Soit $A, B \in \mathcal{E}$ distincts, alors le sous-espace engendré par $X = \{A, B\}$ est la droite affine (AB).

1.3 Coordonnées barycentriques

Définition 20. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $X = (A_1, ..., A_k)$ et $\mathcal{F}$ le sous-espace affine engendré par X. On dit que*

1. *X est affinement libre si pour tout $M \in \mathcal{F}$, il existe une unique famille de scalaires $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ et M est le barycentre de $\{(A_i, \lambda_i), 1 \leqslant i \leqslant k\}$.*
   Sinon, on dit que X est affinement liée.
2. *X est affinement génératrice si $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.*
3. *X est un repère affine de $\mathcal{E}$ si X est à la fois affinement génératrice, à la fois affinement libre. Dans ce cas, la famille $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ est appelée coordonnées barycentriques de M dans le repère affine X.*

Proposition 21. *Soit $X = \{A_0, ..., A_k\}$. Alors, on a équivalence entre :*

1. *X est affinement libre (resp. affinement génératrice).*
2. *$\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}\right\}$ est libre (resp. génératrice) dans E.*

Remarque 22 :

- Tout repère affine d'un espace affine de dimension n est de cardinal $n+1$.
- Un repère affine de $\mathbb{R}^2$ est formé par les sommets d'un vrai triangle.
- Un repère affine de $\mathbb{R}^3$ est formé par les sommets d'un vrai tétraèdre.

Corollaire 23. *Soit* $(A_0, ..., A_n)$ *un repère affine de* $\mathcal{E}$ *et* $(B_0, ..., B_n)$ *une famille de points de* $\mathcal{F}$*, alors il existe une unique application afine* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *telle que* $f(A_i) = B_i$*.*
De plus, f *est un isomorphisme si, et seulement si,* $(B_0, ..., B_n)$ *est un repère affine de* $\mathcal{F}$*.*

Application 24 : Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ de somme non nulle et $(A_1A_2A_3)$ un vrai triangle. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on note G_σ le barycentre de $\big\{(A_i, \lambda_{\sigma(i)}), i = 1, 2, 3\big\}$.
Pour montrer que les G_σ sont tous sur une même ellipse, il suffit de vérifier le résultat pour $(A_1A_2A_3)$ équilatéral auquel cas l'ellipse est u cercle.

Définition 25 (Hyperplan standard)**.** *Soit* $(e_0, ..., e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *et* O *l'origine. L'hyperplan standard* $\mathcal{H}$ *est l'hyperplan affine d'équation* $\big\{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 + ... + x_n = 1\big\}$*.*
On note $A_i = O + e_i$ *qui forme un repère affine de* $\mathcal{H}$*.*

Théorème 26. *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace affine de dimension* n *muni d'un repère affine* R*. Il existe un unique isomoprhisme de* $\mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{H}$ *qui envoie* R *sur* $(A_0, ..., A_n)$ *et*

1. *Si* $M \in \mathcal{H}$*, les coordonnées barycentriques de* M *dans le repère* $(A_0, ..., A_n)$ *sont les coordonnées de* M *dans le repère cartésien* $(O, e_0, ..., e_n)$*.*
2. *Les points* $M_1, ..., M_k$ *de* $\mathcal{H}$ *sont affinement libres (resp. affinement génératrices) dans* $\mathcal{H}$ *si, et seulement si, les vecteurs* $\overrightarrow{OM_1}, ..., \overrightarrow{OM_k}$ *sont libres (resp. générateurs) de* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*
3. *Une application* $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *est affine si, et seulement s'il existe* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ *qui laisse* $\mathcal{H}$ *stable tel que* $T_{|\mathcal{H}} = f$*.*
   L'application linéaire T *est unique.*

Remarque 27 : Cette réalisation des espaces affines comme hyperplans de $\mathbb{R}^{n+1}$ permet d'obtenir des résultats "simples" grâce à l'algèbre linéaire standard.

2 Convexité

On suppose que E est un espace euclidien de dimension n, ce qui munit $\mathcal{E}$ d'une topologie métrique.

2.1 Généralités

Lemme 28. *Soit* C *une partie de* $\mathcal{E}$*. On a équivalence entre :*

1. *Le barycentre de toute famille finie* $\{(A_1, \lambda_1), ..., (A_k, \lambda_k)\}$ *de poinds pondérés de* C *tels que* $\lambda_i \geqslant 0$ *et* $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ *est dans* C*. On parle de combinaison convexe.*
2. *Pour tout* $A, B \in C$*, le segment* $[AB] = \Big\{A + \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1]\Big\}$ *est inclus dans* C*.*

Définition 29. *Une partie* C *de* $\mathcal{E}$ *qui vérifie l'un des deux points précédents est dite convexe.*

Exemple 30 :

- Tout sous-espace affine est convexe.
- Si E est un espace normé, alors toute boule fermée est convexe.

Proposition 31. *Soit* (C_i) *une famille de parties convexes de* $\mathcal{E}$*, alors* $\displaystyle\bigcap_{i \in I} C_i$ *est convexe.*
Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *une application affine, alors l'image directe et réciproque de tout convexe est convexe.*

Définition 32. *Soit* X *une partie non vide de* $\mathcal{E}$*, l'enveloppe convexe de* X*,* $\mathrm{Conv}(X)$*, est le plus petit convexe de* $\mathcal{E}$ *qui contient* X*.*

Exemple 33 : Si $X = \{A, B\}$, alors $\mathrm{Conv}(X)$ est le segment $[AB]$.

Proposition 34. *Soit* X *une partie non vide de* $\mathcal{E}$*, alors* $\mathrm{Conv}(X)$ *est l'ensemble des barycentres* $\{(A_1, \lambda_1), ..., (A_k, \lambda_k)\}$ *avec* $k \in \mathbb{N}^*, A_1, ..., A_k \in X$*,* $\lambda_1, ..., \lambda_k \geqslant 0$ *et* $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$*.*

Corollaire 35. *Soit* X *une partie non vide de* $\mathcal{E}$ *et* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *affine, alors* $f\big(\mathrm{Conv}(X)\big) = \mathrm{Conv}\big(f(X)\big)$*.*

Application 36 : (Gauss-Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Proposition 37. *Soit* X *une partie de* $\mathcal{E}$*, alors*

1. *L'intersection des convexes fermés contenant* X *est* $\overline{\mathrm{Conv}(X)}$*.*
2. *Si* X *est convexe et compacte, alors* $X = \mathrm{Conv}(\mathrm{Fr}(X))$*.*
3. *Si* X *est ouvert,* $\mathrm{Conv}(X)$ *est ouvert.*

Remarque 38 : L'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermée : $X = \{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, xy \geqslant 1\right\}$ est fermée, mais $\mathrm{Conv}(X) = \{(0,0)\} \cup]0,+\infty[^2$.

Théorème 39 (Carathéodory)**.** *Soit X une partie non vide de $\mathcal{E}$, alors tout élément de X est combinaison convexe d'au plus $n+1$ points de X.*

Application 40 : Si X est compact, alors $\mathrm{Conv}(X)$ est aussi compact.

2.2 Points extrémaux et séparation

Lemme 41. *Soit C une partie convexe et $P \in C$. On a équivalence entre :*

1. *Pour tout $M, N \in C$, si P est le milieu de $[MN]$, alors $M = P = N$.*
2. *Pour tout $M, N \in C$, si $P \in [MN] \setminus \{M, N\}$, alors $M = P = N$.*
3. *$C \setminus \{P\}$ est convexe.*

Définition 42. *Soit C un convexe et $P \in C$ qui vérifie l'une des conditions équivalentes précédentes, on dit que P est un point extrémal de C.*

Exemple 43 :

- Les points extrémaux d'un carré $ABCD$ est $\{A, B, C, D\}$.
- Les points extrémaux d'une boule fermée est la sphère, mais une sphère n'a plus de points extrémaux.

Proposition 44. *Soit C une partie convexe de $\mathcal{E}$ et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ affine tel que $f(C) = C$, alors f permute les points extrémaux de C.*

Définition 45. *Soit X une partie de $\mathcal{E}$, un hyperplan d'appui de X en $M \in X$ est un hyperplan contenant M et qui sépare X et M.*

Théorème 46 (Admis)**.** *Soit X un convexe fermée, alors tout point de $\mathrm{Fr}(X)$ appartient à au moins un hyperplan d'appui de X.*

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 47 (Krein-Milman)**.** *Soit C un compact convexe non vide d'un espace normé de dimension finie n, alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Théorème 48 (Choquet)**.** *Soit C un compact convexe, on suppose que l'ensemble des points extrémaux de C est compact et $\ell : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors, ℓ atteint son minimum en des points extrémaux de K.*

2.3 Combinatoire des convexes

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 49. *Soit $m \geqslant n+2$ et $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$, il existe une partition $[\![1, m]\!] = I \sqcup J$ tel que*

$$\mathrm{Conv}(x_i)_{i \in I} \cap \mathrm{Conv}(x_j)_{j \in J} \neq \emptyset$$

Théorème 50 (Helly)**.** *Soit $m \geqslant n+1$ et $K_1, ..., K_m$ des compacts convexes de $\mathbb{R}^n$, si chaque intersection de $n+1$ compacts est non vide, alors $\bigcap_{i=1}^{m} K_i \neq \emptyset$.*

Application 51 : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $S_1, ..., S_q$ des segments portés par des droites parallèles. Si les segments S_i trois à trois ont une sécante commune, alors il existe une sécante qui coupe tous les S_i.

Références :

- Combes, Algèbre et géométrie.
- Tauvel, Géométrie.