171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Pandou

13 mai 2022

On fixe E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 Vocabulaire des formes quadratiques

1.1 Forme polaire

Définition 1. *Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in E$, les applications $\varphi(\cdot, y)$ et $\varphi(y, \cdot)$ sont linéaires.*

Définition 2. *Soit φ une forme bilinéaire sur E, on dit que φ est symétrique si $\forall x, y \in E, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.*

Exemple 3 :
- Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique.
- $(A,B) \longmapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique.

Définition 4. *Une forme quadratique $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application pour laquelle il existe une forme bilinéaire φ telle que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x)$.*
On note $\mathcal{Q}(E)$ l'espace des formes quadratiques.

Théorème 5. *Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ, appelée forme polaire de q, telle que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x)$. De plus, on a*

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big) = \frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y)\big)$$

Exemple 6 :
- La norme euclidienne est la forme quadratique associée à un produit scalaire.
- $A \longmapsto \mathrm{Tr}(A^2)$ est une forme quadratique.

Corollaire 7.

$$\dim\big(\mathcal{Q}(E)\big) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Définition 8. *Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.*
- *Le rang de q est le rang de l'application $\varphi : x \in E \longmapsto \varphi(x, \cdot) \in E^*$.*
- *Le noyau de q est le noyau de l'application $\varphi : x \in E \longmapsto \varphi(x, \cdot) \in E^*$.*

On dit que q est non dégénérée si $\mathrm{Ker}(q) = 0$.

Proposition 9 (Théorème du rang)**.** *Soit q une forme quadratique sur E,*

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(q)\big) + \mathrm{rg}(q)$$

Exemple 10 : Un produit scalaire est non dégénéré. $A \longmapsto \mathrm{Tr}(A^2)$ est non dégénérée.

1.2 Représentation matricielle

Définition 11. *Soit q une forme quadratique de forme polaire φ et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. La matrice de q dans cette base est $\big(\varphi(e_i, e_j)\big) \in S_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 12. *La matrice de q dans une base B est la matrice de $x \longmapsto \varphi(x, \cdot)$ dans les bases B et B^*.*

Corollaire 13. *Soit q une forme quadratique et M la matrice de q dans une base, alors*

$$\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(M) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(M)$$

En particulier, q est non dégénérée si, et seulement si, $\det(M) \neq 0$.

Exemple 14 : Dans une base orthogonale, la matrice d'un produit scalaire est diagonale. Si la base est orthonormée, c'est l'identité.

Remarque 15 : La restrcition d'une forme quadratique non dégénérée n'est pas nécessairement non dégnérée. Par exemple, $q(x,y) = 2xy$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, mais sa restriction à (e_1) est dégénérée.

Proposition 16. *Soit q une forme quadratique de E et $x, y \in E$. On fixe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E. On note M la matrice de q dans cette base et X, Y les coordonnées de x et y dans cette base, alors*

$$q(x) = X^T M X \qquad \text{et} \qquad \varphi(x,y) = X^T M Y$$

Proposition 17. *Soit B et B' deux bases, on note P la matrice de passage de B à B' et q une forme quadratique sur E, alors*

$$\mathrm{Mat}_{B'}(q) = P^T \mathrm{Mat}_B(q) P$$

Définition 18. *On définit une action à gauche de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ via $P\cdot M = P^T MP$, deux matrices dans la même orbite sont dites congruentes.*

Proposition 19. *Le déterminant de deux matrices congruentes ont même signe.*

1.3 Représentation polynomiale

Définition 20. *On dit que $Q \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ est homogène de degré 2 si*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, Q(\lambda X_1, ..., \lambda X_n) = \lambda^2 Q(X_1, ..., X_n)$$

Proposition 21. *On a une correspondance bijective entre $\mathcal{Q}(E)$ et l'ensemble des polynômes homogènes de degré 2.;*

1.4 Orthogonalité

Définition 22. *On dit que x est isotrope si $q(x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes est noté $C(q)$, appelé cône isotrope. Si $C(q) = 0$, on dit que q est définie.*

Exemple 23 : Si $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, alors $C(q)$ est un véritable cône.

Proposition 24.

$$\mathrm{Ker}(q) \subset C(q)$$

En particulier, si q est définie, alors q est non dégénérée.

Remarque 25 : La réciproque est fausse : $q(x, y) = x^2 - y^2$ est non dégénérée, mais les $(x, -x)$ sont isotropes.

Définition 26. *On dit que x et y sont orthogonaux si $\varphi(x, y) = 0$. Si A est une partie de E, on note $A^\perp = \{y \in E, \forall a \in A, \varphi(a, y) = 0\}$.*

Remarque 27 : $\mathrm{Ker}(q) = E^\perp$ et $x \in C(q) \iff x \perp x$.

Proposition 28. *Soit F un sous-espace de E, on a*

1. $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) + \dim\left(F \cap \mathrm{Ker}(q)\right)$.
2. $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}(q)$.

Corollaire 29. *Si $q_{|F}$ est définie, alors $F \oplus F^\perp = E$ et si q est définie, alors $F = F^{\perp\perp}$.*

2 Formes quadratiques réelles

2.1 Réduction

Définition 30. *Une base $(e_1, ..., e_n)$ est dite orthogonale si $\forall i \neq j, \varphi(e_i, e_j) = 0$.*

Théorème 31. *Il existe toujours une base orthogonale.*

Théorème 32 (Spectral)**.** *On suppose que E est un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée qui est orthogonale pour q.*

Corollaire 33. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale telles que*

$$A = P^T P \qquad et \qquad B = P^T DP$$

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 34 (log-concavité du déterminant)**.** *Si $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors*

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$

Théorème 35 (Ellipsoïde de John-Lowner)**.** *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal contenant K.*

Application 36 : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

2.2 Classification

Proposition 37. *Il existe deux entiers (r, s) et une base de E telle que la matrice de q dans cette base est $\mathrm{diag}(I_r, -I_s, 0)$.*

Définition 38. *On dit que q est positive (resp. négative) si $\forall x \in E, q(x) \geqslant 0$ (resp. $q(x) \leqslant 0$).*

Proposition 39. *Soit q une forme quadratique définie positive, il existe une base dans laquelle la matrice de q est I_n. Autrement dit,*

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \left\{PP^T, P \in GL_n(\mathbb{R})\right\}$$

Définition 40. *Soit q une forme quadratique. On note r la dimension maximale d'un sous-espace F tel que $q_{|F}$ est définie positive et s la dimension maximale d'un sous-espace G tel que $q_{|G}$ est définie négative.*
Le couple (r, s) est appelé signature de q.

Théorème 41 (Inertie de Sylvester)**.** *Soit q une forme quadratique de signature (r, s), alors il existe une base dans laquelle la matrice de q est $\mathrm{diag}(I_r, -I_s, 0)$.*

Corollaire 42. *Deux matrices symétriques réelles sont congruentes si, et seulement si, elles ont même signature.*

Corollaire 43.

$$\mathrm{rg}(q) = r + s$$

Exemple 44 : La signature de $q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ est $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

3 Applications en géométrie

3.1 Coniques et quadriques

Définition 45. *Soit q une forme quadratique non nulle, ℓ une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$. Une conique est un ensemble*

$$\mathcal{C} = \left\{v \in \mathbb{R}^2, q(v) + \ell(v) = k\right\} \qquad \textit{avec} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Proposition 46. *Il existe une base orthogonale (v_1, v_2) pour q et pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. Les directions $\mathbb{R}v_1$ et $\mathbb{R}v_2$ sont appelées les directions principales de $\mathcal{C}$.*

Théorème 47. *Soit $\mathcal{C}$ une conique d'équation $q(v)+\ell(v) = k$ non vide et non réduit à un point. On suppose que q est non dégénérée. Alors, il existe une transformation orthogonale et une translation qui envoie $\mathcal{C}$ sur une conique d'équation*

$$ax^2 + by^2 = h$$

- *Si q est de signature $(2,0)$ (ou $(0,2)$), alors $\mathcal{C}$ est une ellipse dont une équation générique est*
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$
A est la longueur du demi-grand axe et B la longueur du demi-petit axe.
- *Si q est de signature $(1,1)$ et $h \neq 0$, alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole dont une équation générique est*
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$
- *Si q est de signature $(1,1)$ et $h = 0$, alors $\mathcal{C}$ est une réunion de deux droites sécantes.*

Voir figure en annexe.

Théorème 48. *Soit $\mathcal{C}$ une conique d'équation $q(v) + \ell(v) = k$ non vide et non réduit à un point. On suppose que q est dégénérée, disons de signature $(1,0)$. Alors, il existe une transformation orthogonale et une translation qui envoie $\mathcal{C}$ sur une conique d'équation*

$$ax^2 - 2sy = h$$

- *Si $s \neq 0$, alors $\mathcal{C}$ est une parabole, dont une équation générique est*
$$y = ax^2$$
- *Si $s = 0$, alors $\mathcal{C}$ est une réunion de deux droites parallèles.*

Voir figure en annexe.

Corollaire 49. *Soit $\mathcal{C}$ une conique d'équation $q(v) + \ell(v) = k$ non vide et non réduit à un point. Alors,*

1. *Si q est de signature $(2,0)$ ou $(0,2)$, alors $\mathcal{C}$ est une ellipse.*
2. *Si q est de signature $(1,1)$, alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole qui dégénère éventuellement en deux droites sécantes.*
3. *Si q est de signature $(1,0)$ ou $(0,1)$, alors $\mathcal{C}$ est une parabole qui dégénère éventuellement en deux droites parallèles.*

Définition 50. *Soit q une forme quadratique non nulle, ℓ une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$. Une quadrique est un ensemble*

$$\mathcal{Q} = \{v \in \mathbb{R}^n, q(v) + \ell(v) = k\} \qquad \textit{avec} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Proposition 51. *Il existe une base orthogonale $(v_1, ..., v_n)$ pour q et pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Chacune des directions ainsi définies sont appelées les directions principales de $\mathcal{Q}$.*

Théorème 52 (Classification en dimension 3)**.** *Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique d'équation $q(v) + \ell(v) = k$ non vide et non réduit à un point. Alors,*

1. ***Si** $\operatorname{rg}(q) = 3$, $\mathcal{Q}$ est semblable à une quadrique d'équation*
$$ax^2 + by^2 + cz^2 = h$$
   (a) *Si q est de signature $(3,0)$ (ou $(0,3)$), $\mathcal{Q}$ est un ellipsoïde ($\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$).*
   (b) *Si q est de signature $(2,0)$ (ou $(0,2)$),*
      - *Si $h > 0$, $\mathcal{Q}$ est une hyperboloïde à une nappe ($\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$).*
      - *Si $h = 0$, $\mathcal{Q}$ est un cône ($\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0$).*
      - *Si $h < 0$, $\mathcal{Q}$ est une hyperboloïde à deux nappes ($\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = -1$).*
2. ***Si** $\operatorname{rg}(q) = 2$, $\mathcal{Q}$ est semblable à une quadrique d'équation*
$$ax^2 + by^2 - 2cz = h$$
   (a) *Si $c = 0$, $\mathcal{Q}$ est un cylindre dont les sections par des plans orthogonaux sont des coniques de signature $(2,0)$ ou $(1,1)$, on parle de cylindre elliptique ($\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$) ou cylindre hyperbolique ($\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$), éventuellement dégénéré en deux plans non parallèles.*
   (b) *Si $c \neq 0$, l'équation se réduit en $ax^2 + by^2 = z$.*
      - *Si q est de signature $(2,0)$, $\mathcal{Q}$ est un paraboloïde elliptique ($\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = z$).*
      - *Si q est de signature $(1,1)$, $\mathcal{Q}$ est un paraboloïde hyperbolique ($\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = z$).*
3. ***Si** $\operatorname{rg}(q) = 1$, $\mathcal{Q}$ est semblable à une quadrique d'équation*
$$ax^2 - 2sy - 2tz = h$$
   (a) *Si $s \neq 0$ (ou $t \neq 0$), $\mathcal{Q}$ est un cylindre parabolique ($y = ax^2$).*
   (b) *Si $s = t = 0$, $\mathcal{Q}$ dégénère en deux plans parallèles ($ax^2 = h$), qui dégénère éventuellement en un seul plan.*

3.2 Classification des points critiques

Définition 53. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$, on dit que $a \in U$ est un point critique de f si $\mathrm{d}f(a) = 0$.*

Proposition 54. *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f.*

Théorème 55 (Schwarz)**.** *On suppose que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}^2 f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique.*

Théorème 56. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.*

1. *Si f admet un minimum local en $a \in U$, alors $\mathrm{d}^2 f(a)$ est positive.*
2. *Si a est un point critique de f tel que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est définie positive, alors a est un minimum local strict de f.*

Exemple 57 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un point critique de f, on note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \qquad \text{et} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

- Si $rt - s^2 > 0$, alors a est un minimum (resp. maximum) local si $r > 0$ (resp. $r < 0$).
- Si $rt - s^2 < 0$, on dit que a est un point selle.

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 58. *Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que*

$$\forall M \in V, \varphi(M) = M^T A_0 M$$

Théorème 59 (de Morse)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ tel que 0 est un point critique de f et $\mathrm{d}^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$.*
Alors, il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \ldots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \ldots - \varphi_n(x)^2$$

Application 60 : Les points critiques non dégénérés d'une fonction $\mathcal{C}^3$ sont isolés.

Références :

- Arnaudiès, Fraysse, Cours de mathématiques - Algèbre bilinéaire et géométrie.
- Berger, Géométrie.
- Gourdon, Algèbre.
- Grifone, Algèbre linéaire.
- Pazzis, Invitation aux formes quadratiques.
- Pommellet, Cours d'analyse.