170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Pandou

13 mai 2022

On fixe un corps K de caractéristique $\neq 2$.

1 Généralités

1.1 Forme polaire

Définition 1. *Soit E et F deux K-espaces vectoriels, on dit que $\varphi : E \times F \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire si pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x, \cdot)$ est linéaire et si pour tout $y \in F$, l'application $\varphi(\cdot, y)$ est linéaire.*

Définition 2. *Soit φ une forme bilinéaire sur E, on dit que*

1. *φ est symétrique si $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.*
2. *φ est antisymétrique si $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$.*

On note $\mathcal{S}(E)$ l'espace des formes bilinéaires symétriques et $\mathcal{A}(E)$ l'espace des formes bilinéaires antisymétriques.

Proposition 3.

$$\mathrm{Bil}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$$

Définition 4. *Une forme quadratique sur E est une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ tel que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$.*
On note $\mathcal{Q}(E)$ l'espace des formes quadratiques sur E.

Théorème 5. *Soit q une forme quadratique sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$. φ est appelée la forme polaire de q.*

Proposition 6 (Formule de polarisation)**.** *Soit q une forme quadratique sur E, de forme polaire φ, on a*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y) - q(x) - q(y)\big) = \frac{1}{4}\big(q(x + y) - q(x - y)\big)$$

Exemple 7 : Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E : c'est la forme polaire de la norme euclidienne associée.

Corollaire 8.

$$\dim\big(\mathcal{Q}(E)\big) = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Définition 9. *Soit q une forme quadratique sur E, de forme polaire φ.*

- *Le rang de q est le rang de l'application $\varphi : x \in E \longmapsto \varphi(x, \cdot) \in E^*$.*
- *Le noyau de q est le noyau de l'application $\varphi : x \in E \longmapsto \varphi(x, \cdot) \in E^*$.*

On dit que q est non dégénérée si $\mathrm{Ker}(q) = 0$.

Proposition 10 (Théorème du rang)**.** *Soit q une forme quadratique sur E, alors*

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(q)\big) + \mathrm{rg}(q)$$

Exemple 11 : Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors il est non dégénéré.

1.2 Représentation matricielle

Définition 12. *Soit q une forme quadratique de forme polaire φ et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. La matrice de q dans cette base est $\big(\varphi(e_i, e_j)\big) \in S_n(K)$.*

Proposition 13. *La matrice de q dans une base B est la matrice de $x \longmapsto \varphi(x, \cdot)$ dans les bases B et B^*.*

Corollaire 14. *Soit q une forme quadratique et M la matrice de q dans une base, alors*

$$\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(M) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(M)$$

En particulier, q est non dégénérée si, et seulement si, $\det(M) \neq 0$.

Exemple 15 : La matrice d'un produit scalaire dans une base orthogonale est diagonale. C'est l'identité, si la base est orthonormée.

Remarque 16 : La restriction d'une forme quadratique non dégénérée n'est pas nécessairement non dégénérée. Si on prend $q(x, y) = 2xy$, sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mais sa restriction à $\mathbb{R}$ est dégénérée.

Proposition 17. *Soit q une forme quadratique de E et $x, y \in E$, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On note M la matrice de q dans cette base et X, Y les coordonnées de x et y dans la base $(e_1, ..., e_n)$, alors on a*

$$q(x) = X^T M X \qquad \textit{et} \qquad \varphi(x, y) = X^T M Y$$

où φ est la forme polaire de q.

Proposition 18. *Soit B et B' deux bases, on note P la matrice de passage de B à B' et q une forme quadratique sur E. Alors,*

$$\mathrm{Mat}_{B'}(q) = P^T \mathrm{Mat}_B(q) P$$

Définition 19. *On définit alors une action à gauche de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ via $P \cdot M = P^T M P$, on dit que deux matrices dans la même orbite sont congruentes.*

Remarque 20 : L'étude des orbites de cette action est exactement l'étude des formes quadratiques abstraites.

Définition 21. *On suppose que q est non dégénérée, le déterminant d'une matrice de q modulo les carrés de K^* est appelé discriminant de q, noté $\mathrm{disc}(q)$.*

Proposition 22. *Deux formes quadratiques équivalentes ont même discrminant et même rang.*

1.3 Représentation polynomiale

Définition 23. *On dit que $Q \in K[X_1, ..., X_n]$ est homogène de degré 2 si*

$$Q(TX_1, ..., TX_n) = T^2 Q(X_1, ..., X_n) \qquad \textit{dans} \qquad K[X_1, ..., X_n, T]$$

Proposition 24. *On a une correspondance bijective entre $\mathcal{Q}(E)$ avec l'ensemble des polynômes homogènes de degré 2.*

Remarque 25 : L'action de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ devient une action de $GL_n(K)$ sur l'ensemble des polynômes homogènes de degré 2 par action via

$$P \cdot Q(X_1, ..., X_n) = Q(P^T (X_1, ..., X_n)^T)$$

2 Orthogonalité et isotropie

On fixe une forme quadratique q sur E de forme polaire φ.

2.1 Orthogonalité et isotropie

Définition 26. *On dit que $x \in E$ est isotrope si $q(x) = 0$. On note $C(q)$ l'ensemble des vecteurs isotropes, appelé cône isotrope. Si $C(q) = 0$, on dit que q est anisotrope.*

Exemple 27 : Si $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, le cône isotrope est non nul et est un cône.

Proposition 28.

$$\mathrm{Ker}(q) \subset C(q)$$

En particulier, si q est anisotrope, alors q est non dégénérée.

Remarque 29 : La réciproque est fausse, par exemple $q(x, y) = x^2 - y^2$ est non dégénérée, les vecteurs $(x, -x)$ sont tous isotropes.

Définition 30. *On dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x, y) = 0$. Si A est une partie de E, on note $A^\perp$ l'espace vectoriel $\{y \in E, \forall a \in A, \varphi(a, y) = 0\}$.*
On dit que $A, B \subset E$ sont orthogonaux si $\forall (a, b) \in A \times B, \varphi(a, b) = 0$.

Proposition 31. *Soit $A \subset B$ deux parties de E, alors*

$$A \subset A^{\perp\perp} \qquad \textit{et} \qquad B^\perp \subset A^\perp$$

Remarque 32 : $\mathrm{Ker}(q) = E^\perp$.

Proposition 33. *Soit F un sous-espace de E, alors, on a*

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) + \dim\left(F \cap \mathrm{Ker}(q)\right)$$

et,

$$F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}(q)$$

Corollaire 34. *Si $q_{|F}$ est anisotrope, alors $F \oplus F^\perp = E$. Et si, q est anisotrope, alors $F = F^{\perp\perp}$.*

2.2 Base orthogonale

Définition 35. *Une base $(e_1, ..., e_n)$ est dite orthogonale si $\forall i \neq j, \varphi(e_i, e_j) = 0$.*

Théorème 36. *Il existe toujours une base orthogonale.*

Corollaire 37. *Soit $A \in S_n(K)$, alors il existe une matrice diagonale dans la classe de congruence de A.*

Remarque 38 : Cette matrice diagonale n'est pas unique : par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont congruentes dans $\mathbb{R}$.

Algorithme 39 : (réduction de Gauss) Soit $P(X_1, ..., X_n) = \sum_i a_{i,i} X_i^2 + \sum_{i<j} a_{i,j} X_i X_j$ un polynôme homogène de degré 2. On raisonne récursivement :

- Si $P(X_1, ..., X_n) = aX_1^2 + x_1 B(X_2, ..., X_n) + C(X_2, ..., X_n)$, alors
$$P(X_1, ..., X_n) = a\left(X_1 + \frac{B(X_2, ..., X_n)}{2a}\right)^2 + \left[C(X_2, ..., X_n) - \frac{B(X_2, ..., X_n)^2}{4a}\right]$$
- Si $P(X_1, ..., X_n) = aX_1X_2 + x_1 B(X_3, ..., X_n) + X_2 C(X_3, ..., X_n) + D(X_3, ..., X_n)$, alors
$$P(X_1, ..., X_n) = \frac{a}{4}\left[\left(X_1 + X_2 + \frac{B+C}{a}\right)^2 - \left(X_1 - X_2 + \frac{C-B}{a}\right)^2\right] + \left[D - \frac{BC}{a}\right]$$

Remarque 40 : On peut déduire de l'algorithme de Gauss une base orthogonale. La réduction de Gauss permet d'écrire

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)^2$$

où les φ_i sont des formes linéaires indépendantes, alors les φ_i sont les composantes de x dans une base orthogonale.

Exemple 41 : Soit $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$. L'algorithme de Gauss donne

$$q(x) = \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{=\varphi_1(x)^2} + 2\underbrace{(x_2+2x_3)^2}_{=\varphi_2(x)^2} - \underbrace{x_3^2}_{=\varphi_3(x)^2}$$

On pose $x_i' = \varphi(x_i)$, alors en exprimant les x_i en fonction des x_i', on trouve les colonnes de la matrice de passage de la base canonique vers une base orthogonale.

Ici par exemple, on a $\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' + 2x_3' \\ x_2 = x_2' - 2x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$ d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Classification

3.1 Sur $\mathbb{C}$

Théorème 42. *Les formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ sont classifiées par leur rang. Plus précisément, si q est de rang r, alors il existe une base dans laquelle la matrice de q est* $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 43. *Sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, il existe une base orthonormée si, et seulement si, q est non dégénérée.*

Corollaire 44.

$$S_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C}) = \left\{ P^T P, P \in GL_n(\mathbb{C}) \right\}$$

Remarque 45 : Le résultat est toujours vrai pour n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$ et même dans un corps où tout élément a une racine carrée.

3.2 Sur $\mathbb{R}$

Proposition 46. *Il existe deux entiers (r,s) et une base de E telle que la matrice de q dans cette base est diagonale par blocs* $\mathrm{diag}(I_p, -I_q, 0)$.

Définition 47. *On dit que q est définie positive si $\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) > 0$, et définie négative si $-q$ est définie positive.*

Théorème 48 (Spectral)**.** *Soit q une forme quadratique définie positive, alors il existe une base orthonormée pour q.*

Corollaire 49. *Soit q une forme quadratique définie positive, alors il existe une base dans laquelle la matrice de q est I_n.*

Remarque 50 : Autrement dit, $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \left\{ PP^T, P \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}$.

Définition 51. *Soit q une forme quadratique. On note p la dimension maximale d'un sous-espace F tel que $q_{|F} > 0$ et q la dimension maximale d'un sous-espace G tel que $q_{|G} < 0$.*
Le couple (r,s) est appelé signature de q.

Théorème 52 (Inertie de Sylvester)**.** *Soit q une forme quadratique de signature (r,s), alors il existe une base dans laquelle la matrice de q est diagonale par blocs* $\mathrm{diag}(I_p, -I_q, 0)$.

Corollaire 53. *Deux matrices symétriques réelles sont congruentes si, et seulement si, elles ont même signature.*

Corollaire 54. *Si q est de signature (r,s), alors*

$$\mathrm{rg}(q) = r + s$$

Exemple 55 : La signature de $q : A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{Tr}(A^2)$ est $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$.

3.3 Sur $\mathbb{F}_q$, q impair

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 56. *Soit $a, b \in \mathbb{F}_q^*$, il existe toujours au moins une solution à l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ dans $\mathbb{F}_q$.*

Théorème 57. *Soit $\delta \in \mathbb{F}_q$ un élément non carré et q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_q^n$, alors q est équivalente à l'une des formes quadratiques :*

1. $q_1(x) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2$.
2. $q_2(x) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2$.

Corollaire 58. *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{F}_q^n$, alors il existe une base dans laquelle la matrice de q est diagonale* $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ *ou* $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \delta, 0, \ldots, 0)$ *où δ est un élément non carré fixé.*

4 Application à l'étude des points critiques

Définition 59. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$, on dit que $a \in U$ est un point critique de f si $\mathrm{d}f(a) = 0$.*

Proposition 60. *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f.*

Théorème 61 (Schwarz). *On suppose que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}^2 f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique.*

Théorème 62. *Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.*

1. *Si f admet un minimum local en $a \in U$, alors $\mathrm{d}^2 f(a)$ est positive.*
2. *Si a est un point critique de f tel que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est définie positive, alors a est un minimum local strict de f.*

Exemple 63 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^2$ et a un point critique de a, on note

$$r = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(a), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \qquad \text{et} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors a est un minimum local strict.
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors a est un maximum local strict.
- Si $rt - s^2 < 0$, on dit que a est un point selle.

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 64. *Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : M \in V \longmapsto \varphi(M) \in GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que*

$$\forall M \in V, \varphi(M) = M^T A_0 M$$

Théorème 65 (Morse). *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^3$ tel que 0 est un point critique de f et $\mathrm{d}^2 f(0)$ est non dégénéré de signature $(p, n-p)$.*
Alors, il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \ldots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \ldots - \varphi_n(x)^2$$

Application 66 : Les points critiques non dégénérés d'une fonction $\mathcal{C}^3$ sont isolés.

Références :

- Gourdon, Algèbre.
- Grifone, Algèbre linéaire.
- Pazzis, Invitation aux formes quadratiques.
- Perrin, Cours d'algèbre.