161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien

Pandou

8 janvier 2022

1 Généralités et définitions

1.1 Définitions

Définition 1. *Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, on dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien si E est un espace euclidien. Alors, $\mathcal{E}$ est muni d'une distance défini par*

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Définition 2. *Soit $(\mathcal{E}, E)$ et $(\mathcal{F}, F)$ deux espaces affines euclidiens.*

- *Une isométrie affine est une application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ qui conserve la distance :*
$$\forall A, B \in \mathcal{E}, d(A,B) = d\big(\varphi(A), \varphi(B)\big)$$
- *Une isométrie vectorielle est une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ qui conserve la norme :*
$$\forall u \in E, \big\|f(u)\big\| = \|u\|$$

Exemple 3 :

- Les translations sont des isométries.
- Une homothétie est une isométrie si, et seulement si, son rapport est ± 1.

Proposition 4. *Une application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est une isométrie affine si, et seulement si, $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow F$ est une isométrie vectorielle.*

Proposition 5. *Si f et g sont des isométries (affines ou vectorielles), alors $f \circ g$ est encore une isométrie. Si f est une isométrie bijective, alors f^{-1} est aussi une isométrie.*

Définition 6. *Le groupe des isométries vectorielles de E est noté $O(E)$, le groupe des isométries affines de $\mathcal{E}$ est noté $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.*

Définition 7. *Un déplacement d'un espace affine (ou isométrie positive) est une isométrie f telle que $\overrightarrow{f} \in SO(E)$. Le groupe des isométries positives de $\mathcal{E}$ est noté $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$.*

1.2 Premières propriétés et exemples

Proposition 8. *Une application linéaire est une isométrie si, et seulement si, l'image de toute base orthonormée est toujours une base orthonormée.*
De même, une application affine est une isométrie affine si, et seulement si, l'image de tout repère orthonormé est un repère orthonormé.

Proposition 9. *$\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des repères orthonormés de $\mathcal{E}$.*

Application 10 : Deux triangles sont isométriques si, et seulement si, il existe une bijection entre les longueurs de leurs côtés.

Théorème 11. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n, alors*

$$\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$$

et,

$$O(n) \simeq SO(n) \rtimes \{\pm 1\}$$

Proposition 12. *Soit E un espace euclidien et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = \mathrm{Id}$. Alors, on a équivalence entre :*

1. *v est une isométrie.*
2. *v est symétrique.*
3. *$E = E_1 \oplus^\perp E_{-1}$.*

On dit alors que v est une symétrie orthogonale.

Définition 13. *Soit v une symétrie orthogonale, on dit que*

1. *v une réflexion orthogonale si $\dim(E_{-1}) = 1$.*
2. *v est un renversement si $\dim(E_{-1}) = 2$.*

Proposition 14. *Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien et f une isométrie affine de $\mathcal{E}$. Alors, on a équivalence entre :*

1. *$\overrightarrow{f}$ est symétrique.*
2. *$\overrightarrow{f}$ est une symétrie.*
3. *Il existe $a \in E$ et une symétrie orthogonale s tels que $f = t_a \circ s$.*
4. *Il existe un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ et $b \in F$ tels que $f = t_b \circ s_{\mathcal{F}}$, où $s_{\mathcal{F}}$ est la symétrie orthogonale dont l'ensemble des points fixes est $\mathcal{F}$.*

On dit que f est une symétrie glissée.

2 Groupe orthogonal et groupe d'isométries

2.1 Point de vue algébrique : réduction, générateurs, actions, conjugaison

Proposition 15.
1. *Le centre de $O_n(\mathbb{R})$ est $\{\pm \mathrm{Id}\}$.*
2. *$SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif et si $n \geqslant 3$, alors $SO_n(\mathbb{R})$ a pour centre $\begin{cases} \{\mathrm{Id}\} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \{\pm\mathrm{Id}\} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.*

Proposition 16. *Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in O(E)$. Si F est un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.*

Proposition 17. *On a*

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}, \varepsilon = \pm 1, \theta \in]-\pi,\pi] \right\}$$

Théorème 18. *Soit $u \in O(E)$, alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est*

$$\mathrm{diag}\left(1, ..., 1, -1, ..., -1, R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_r}\right)$$

où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Théorème 19. *$O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, tout $u \in O(E)$ est produit d'au plus $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id})$ réflexions orthogonales.*

Corollaire 20. *$SO(E)$ est engendré par les renversements. Plus précisément, tout $u \in SO(E)$ est produit d'au plus n renversements.*

Proposition 21. *$SO(E)$ agit transitivement sur l'ensemble des sous-espaces de E de même dimension.*

Proposition 22.
1. *$D\big(O_n(\mathbb{R})\big) = SO_n(\mathbb{R})$.*
2. *Si $n \geqslant 3$, $D\big(SO_n(\mathbb{R})\big) = SO_n(\mathbb{R})$.*

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 23. *$SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Remarque 24 : Si n est impair, $SO_n(\mathbb{R})$ et simple. Si n est pair et $n \neq 4$, alors $PSO_n(\mathbb{R})$ est simple, mais $PSO_4(\mathbb{R})$ n'est pas simple.

2.2 Topologie

Proposition 25. *$O_n(\mathbb{R})$ est compact.*

Proposition 26. *$O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs homéomorphes à $SO_n(\mathbb{R})$.*

Corollaire 27. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, alors $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ est connexe par arcs.*

Proposition 28. *$SO_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.*

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 29. *On a les isomorphismes suivants :*

$$PSU(2) \simeq SO(3) \qquad \text{et} \qquad PSO(4) \simeq SO(3) \times SO(3)$$

2.3 Classification

Lemme 30. *Soit E un espace euclidien et $v \in O(E)$, alors*

$$\mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(v - \mathrm{Id})^\perp$$

Proposition 31. *Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, alors il existe un unique couple $(g, x) \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \times \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$ tels que*

1. *g admet un point fixe.*
2. *$f = t_x \circ g$.*
3. *g et t_x commutent.*

Classification 32 (Isométries du plan). *Soit f une isométrie d'un plan euclidien $\mathcal{P}$. On écrit $f = t_x \circ g$.*

$\mathrm{Mat}(f)$	$x = 0$	$x \neq 0$
I_2	Id	*Translation*
$-I_2$	*Symétrie centrale*	
R_θ	*Rotation*	
$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	*Symétrie axiale*	*Symétrie glissée*

Classification 33 (Isométries de l'espace). *Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, on écrit $f = t_x \circ g$.*

$\mathrm{Mat}(f)$	$x = 0$	$x \neq 0$
I_3	Id	*Translation*
$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	*Retournement*	*Vissage*
$M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$	*Rotation*	*Vissage*
$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	*Réflexion orthogonale*	*Symétrie glissée*
$-I_3$	*Symétrie centrale*	
$M'_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$	*Antirotation*	

3 Parties conservées par des isométries

Définition 34. *Soit E un espace euclidien et X une partie de E. On définit $\mathrm{Is}(X)$ le groupe des isométries qui stabilisent X. Le sous-groupe des isométries positives qui stabilisent X est noté $\mathrm{Is}^+(X)$.*

3.1 Polygones réguliers

Proposition 35. *Soit P un polygone régulier à n sommets, alors $\mathrm{Is}(P)$ est engendré par une rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et une symétrie s, avec*

$$r^n = \mathrm{Id}, \qquad s^2 = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad r = sr^{-1}s^{-1}$$

Corollaire 36.

$$\mathrm{Is}(P) \simeq D_{2n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Is}^+(P) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Proposition 37. *Si X est un cercle, alors $\mathrm{Is}^+(X) \simeq \mathbb{S}^1$.*

3.2 Polyèdres

Théorème 38. *Soit T un tétraèdre régulier, alors*

$$\mathrm{Is}(T) \simeq \mathfrak{S}_4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Is}^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$$

Théorème 39. *Soit C un cube, alors*

$$\mathrm{Is}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$$

Théorème 40. *Soit D un dodécaèdre, alors*

$$\mathrm{Is}^+(D) \simeq \mathfrak{A}_5$$

3.3 Systèmes de racines

On fixe un espace euclidien $\big(E, (\cdot|\cdot)\big)$ de dimension n.

Définition 41. *Un système de racines Φ est une partie de E telle que :*

1. *$0 \notin \Phi$.*
2. *Si $\alpha \in \Phi$, les seuls multiples de α dans Φ sont $\pm\alpha$.*
3. *Si $\alpha \in \Phi$, alors la réflexion orthogonale σ_α par rapport à $\alpha^\perp$ stabilise Φ.*
4. *Si $\alpha, \beta \in \Phi$, alors $\langle \beta, \alpha \rangle := \dfrac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$.*

On donne des exemples en annexe.

Proposition 42. *Si $\alpha, \beta \in \Phi$ non colinéaires, avec $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$, alors*

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	*non défini*
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Définition 43. *Une base Δ de Φ est une partie de Φ telle que :*

1. *Δ est une base de E.*
2. *Tout élément $\beta \in \Phi$ est combinaison linéaire à coefficients entiers tous de même signe d'éléments de Δ.*

Les éléments de Δ sont appelées racines simples de Φ.

Proposition 44. *Si α, β sont deux racines simples, alors*

$$(\alpha|\beta) \leqslant 0$$

Théorème 45. *Φ admet toujours une base.*

Définition 46. *On dit que Φ est irréductible si on ne peut pas écrire $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ avec $(\Phi_1|\Phi_2) = 0$.*

Définition 47. *Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ une base de Φ. Alors, le graphe de Coxeter de Φ est un graphe à n sommets où i et j sont reliés par $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle$ arêtes.*

On donne des exemples en annexe.

DEVELOPPEMENT 3

Classification 48. *Les graphes de Coxeter d'un système de racines irréductibles sont parmi les suivants : ...*

Références :

- Audin, Géométrie.
- Combes, Algèbre et géométrie.
- Humphreys, Lie Algebras and Representation Theory.
- Perrin, Cours d'algèbre.