160 : Endomorphismes remarquables dans un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Pandou

30 mai 2022

On fixe E un espace euclidien de dimension n.

1 Endomorphismes adjoints

1.1 Généralités et définitions

Théorème-Définition 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que*

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

On appelle u^* l'adjoint de f.

Proposition 2. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E et M la matrice de u dans cette base. Alors, la matrice de u^* dans cette base est M^T.*

Remarque 3 : Ce résultat n'est pas vrai dans une base qui n'est pas orthonormée !

Proposition 4. *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

1. *$u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto u^* \in \mathcal{L}(E)$ est une involution linéaire.*
2. *$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.*
3. *$\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$ et $\det(u) = \det(u^*)$.*

Proposition 5. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.*

Proposition 6. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a*

$$\mathrm{Ker}(u)^\perp = \mathrm{Im}(u^*) \qquad et \qquad \mathrm{Im}(u)^\perp = \mathrm{Ker}(u^*)$$

1.2 Endomorphismes auto-adjoints

Définition 7. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint si $u^* = u$. On note $\mathrm{Sym}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.*

Proposition 8. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. u est auto-adjoint si, et seulement si, la matrice de u dans cette base est symétrique réelle.*

Corollaire 9. *$\mathrm{Sym}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Lemme 10. *Si $\dim(E) = 2$ et $u \in \mathrm{Sym}(E)$. Il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u.*

Théorème 11 (Spectral). *Soit $u \in \mathrm{Sym}(E)$, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u.*

Corollaire 12. *Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}SP = P^T DP$ est diagonale.*

Corollaire 13. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que*

$$A = P^T P \qquad et \qquad B = P^T DP$$

Application 14 : Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S = R^2$.

Application 15 : (Minimax) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint et $\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u. Alors,

$$\lambda_k = \min_{\dim(V)=k} \left(\max_{x \in V, \|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \right) = \max_{\dim(V)=n-k+1} \left(\min_{x \in V, \|x\|=1} \langle u(x), x \rangle \right)$$

Proposition 16. *Soit $u \in \mathrm{Sym}(E)$, alors on a équivalence entre :*

1. *$\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.*
2. *$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geqslant 0$.*

1.3 Endomorphismes normaux

Définition 17. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.*

Exemple 18 :
- Tout endomorphisme auto-adjoint est normal.
- Toute rotation est un endomorphisme normal.

Proposition 19. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

1. *u est normal.*

2. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
3. *Il existe* $\omega \in O(E)$ *tel que* $u^* = \omega \circ u$.

Lemme 20. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *normal et* F *un sous-espace stable par* u. *Alors,* F *et* $F^\perp$ *sont stables par* u *et* u^*.

Lemme 21. *On suppose que* $\dim(E) = 2$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que* u *n'a pas de valeurs propres réelles. La matrice de* u *dans toute base orthonormée de* E *est de la forme* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Théorème 22. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *normal, alors il existe une base orthonormée de* E *dans laquelle la matrice de* u *est* $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_r, z_1, ..., z_s)$ *où* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *et* $z_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$.

Corollaire 23. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *antisymétrique (ie* $u^* = -u$*), alors il existe une base orthonormée de* E *dans laquelle la matrice de* u *est* $\mathrm{diag}(0, ..., 0, z_1, ..., z_s)$ *où* $z_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$.

2 Étude du groupe orthogonal

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 24. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$, *on dit que* u *est une isométrie si* $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
On note $O(E)$ *l'ensemble des isométries de* E.
On note $O_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in GL_n(\mathbb{R}), M^TM = I_n\right\}$ *et* $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$.

Proposition 25. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$, $(e_1, ..., e_n)$ *une base orthonormée de* E *et* M *la matrice de* u *dans cette base. On a équivalence entre :*

1. $u \in O(E)$.
2. $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
4. *u transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.*

Proposition 26. $O_n(\mathbb{R})$ *et* $SO_n(\mathbb{R})$ *sont des sous-groupes compacts de* $GL_n(\mathbb{R})$.

Proposition 27.
1. *Le centre de* $O_n(\mathbb{R})$ *est* $\{\pm I_n\}$. *En particulier, si* $n \geqslant 2$, $O_n(\mathbb{R})$ *n'est pas commutatif.*
2. *Le centre de* $SO_n(\mathbb{R})$ *est* $\{I_n\}$ *si* n *est impair et* $\{\pm I_n\}$ *si* n *est pair.*

Théorème 28.

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et} \quad O_2(\mathbb{R}) \backslash SO_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

Corollaire 29. $SO_2(\mathbb{R})$ *est commutatif.*

Définition 30. *On note* $PO_n(\mathbb{R})$ *et* $PSO_n(\mathbb{R})$ *les groupes* $O_n(\mathbb{R})$ *et* $SO_n(\mathbb{R})$ *quotientés par leur centre.*

2.2 Générateurs et conjugaison

Définition 31. *Soit* $u \in O(E)$, *on note* $E^- = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$. *On suppose que* $u^2 = \mathrm{Id}$. *On dit que* u *est*

1. *une réflexion orthogonale si* $\dim(E^-) = 1$.
2. *un renversement orthogonale si* $\dim(E^-) = 2$.

Théorème 32. *Soit* $u \in O(E)$, *alors* u *est produit d'au plus* $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id})$ *réflexions orthogonales.*

Lemme 33. *On suppose que* $n \geqslant 3$. *Soit* τ_1 *et* τ_2 *deux réflexions, alors il existe des renversements* σ_1, σ_2 *tels que* $\tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

Théorème 34. *Si* $n \geqslant 3$, *tout élément de* $SO(E)$ *est produit d'au plus* n *renversements orthogonaux.*

Proposition 35. *Soit* V_1 *et* V_2 *deux sous-espaces de même dimension, alors il existe* $u \in SO(E)$ *tel que* $u(V_1) = V_2$.

Corollaire 36. *Deux symétries orthogonales sont conjuguées dans* $SO(E)$ *si, et seulement si, les sous-espaces qu'elles fixent sont de même dimension.*

Théorème 37.
1. *Si* $n \geqslant 2$, $D\big(O(E)\big) = SO(E)$.
2. *Si* $n \geqslant 3$, $D\big(SO(E)\big) = SO(E)$.

Remarque 38 : Si $\dim(E) = 2$, alors $SO(E)$ est commutatif, donc $D\big(SO(E)\big) = \{\mathrm{Id}\}$.

2.3 Structure algébrique

Théorème 39 (Réduction d'une isométrie)**.** *Soit* $u \in O(E)$, *il existe une base orthonormée de* E *dans laquelle la matrice de* u *est* $\mathrm{diag}(I_p, -I_q, R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_s})$ *où* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *avec* $\theta_i \neq 0 \mod (\pi)$.

Application 40 : $\exp : A_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Proposition 41 (Classification des isométries en dimension 3)**.**
- *Les isométries directes ont pour matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *: ce sont des rotations d'angle* θ *autour d'un axe. Si* $\theta = \pi$, *on parle de retournement.*
- *Les isométries indirectes ont pour matrice* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. *Si* $\theta = 0$ *: il s'agit d'une symétrie par rapport à un plan, on parle de réflexion.*

Exemple 42 : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de Vect $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 43. *Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Théorème 44 (Admis)**.** *Le groupe $PSO_n(\mathbb{R})$ est simple pour $n = 3$ et $n \geqslant 5$.*

Remarque 45 : On verra plus tard que $PSO_4(\mathbb{R})$ n'est pas simple.

Lemme 46. *Soit r_1 et r_2 deux renversements d'axes distincts D_1 et D_2, alors $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$ si, et seulement si, $D_1 \perp D_2$.*

Proposition 47. *L'ensemble des renversements de E (ie les involutions de G) est en bijection naturelle avec $\mathbb{RP}^2$.*

Proposition 48 (Admis)**.** *Soit ψ une bijection de $\mathbb{RP}^2$ dans lui-même qui préserve l'alignement, alors il existe $u \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $\overline{u} = \psi$.*

Théorème 49. *Tout automorphisme de $SO_3(\mathbb{R})$ est intérieur.*

3 Applications

3.1 Quaternions et isomorphismes exceptionnels

Théorème-Définition 50. *Il existe une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4, notée $\mathbb{H}$ dont une base est $(1, i, j, k)$ telle que*

1. *1 est l'élément neutre pour la multiplication.*
2. *On a les relations*
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

On note $\mathbb{R} = \mathbb{R}1$ et $\mathbb{I} = \mathrm{Vect}(i, j, k)$.

Définition 51. *Soit $q = a+bi+cj+dk \in \mathbb{H}$, on définit son conjugué par $\overline{q} = a-bi-cj-dk$ et $N(q) = q\overline{q} \in \mathbb{R}_+$.*

Proposition 52. *La conjugaison est une involution $\mathbb{R}$-linéaire telle que $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2 q_1}$.*

Théorème 53.
1. *Tout élément de $\mathbb{H}$ admet un inverse.*
2. *Le centre de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$.*
3. *On a $N(qq') = N(q)N(q')$.*

Proposition 54. *N est une forme quadratique définie positive dont le produit scalaire associé est $\langle h, h'\rangle = \frac{1}{2}(h\overline{h'} + h'\overline{h})$.*

Proposition 55. *On a un isomorphisme*
$$\{h \in \mathbb{H}, N(h) = 1\} \simeq SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$$

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 56. *On a les isomorphismes exceptionnels*
$$PSU(2) \simeq SO(3) \qquad \text{et} \qquad PSO(4) \simeq SO(3) \times SO(3)$$

3.2 Matrices de Househölder

Définition 57. *Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la matrice de Househölder associée est $H_v = I_n - 2\frac{vv^T}{v^T v} \in O_n(\mathbb{R})$.*

Remarque 58 : Une matrice de Househölder H_v est la matrice d'une réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$.

Proposition 59. *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que les $n-1$ dernières coordonnées sont non tous nulles. Il existe une matrice de Househölder H_v tel que $H_v a$ ait ses $n-1$ dernières composantes nulles.*
Plus précisément, on peut prendre $v_\pm = a \pm \|a\| e_1$, de sorte que $H_{v_\pm} a = \mp \|a\| e_1$.

Remarque 60 : La méthode de Househölder pour les systèmes linéaires consiste à trouver $n-1$ matrices de Househölder telles que $H_{n-1}...H_1 A$ est triangulaire supérieure.
Cette méthode est numériquement plus stable que le pivot de Gauss [1]. On peut calculer le déterminant en prêtant attention au fait que $\det(H_v) = -1$ (contrairement aux transvections).

Lemme 61 (Décomposition de Cholesky)**.** *Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux > 0 B telle que $A = BB^*$.*

Théorème 62 (Décomposition QR)**.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = QR$.*
De plus, Q est produit de n matrices de Househölder et les coefficients diagonaux de R peuvent être pris positifs. Si A est inversible, cette décomposition est unique.

Application 63 : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Application 64 : La décomposition QR permet de calculer les éléments propres d'une matrice A.

3.3 Systèmes de racines

On fixe un espace euclidien E de dimension n.

1. La notion ici c'est le conditionnement, mais je décide de ne pas en parler.

Définition 65. *Soit $\alpha \in E$, on note σ_α la réflexion par rapport à l'hyperplan $\alpha^\perp$:*

$$\forall \beta \in E, \sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

On note $\langle \beta, \alpha \rangle = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

Définition 66. *Un système de racines est une partie finie Φ de E telle que*

1. $0 \notin \Phi$ *et* $\mathrm{Vect}(\Phi) = E$.
2. *Si $\alpha \in \Phi$, les seuls multiples de α dans Φ sont $\pm\alpha$.*
3. *Si $\alpha \in \Phi$, alors σ_α laisse Φ invariant.*
4. *Si $\alpha, \beta \in \Phi, \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.*

Exemple 67 : Voir annexe.

Proposition 68. *Soit Φ un système de racines et $\alpha, \beta \in \Phi$ non colinéaires et $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$, les angles et les rapports de longueur peuvent être :*

- $\dfrac{\pi}{2}$ *et* $\dfrac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$ *quelconque.*
- $\dfrac{\pi}{3}$ *ou* $\dfrac{2\pi}{3}$ *et* $\dfrac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = 1$.
- $\dfrac{\pi}{4}$ *ou* $\dfrac{3\pi}{4}$ *et* $\dfrac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = 2$.
- $\dfrac{\pi}{6}$ *ou* $\dfrac{5\pi}{6}$ *et* $\dfrac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = 3$.

Définition 69. *Une base Δ de Φ est une partie de Φ telle que*

1. *Δ est une base de E.*
2. *Tout élément de Φ est combinaison linéaire à coefficients entiers tous de même signe d'éléments de Δ.*

Les éléments de Δ sont appelés racines simples de Φ.

Proposition 70. *Si α, β sont deux racines simples, alors $(\alpha, \beta) \leqslant 0$.*

Théorème 71. *Φ admet toujours une base.*

Définition 72. *On dit que Φ est irréductible si on ne peut pas écrire $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ avec $\Phi_1 \perp \Phi_2$.*

Définition 73. *Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ une base de Φ. On définit le graphe de Coxeter de Φ comme le graphe à n sommets où i et j sont reliés par $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ arêtes.*

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 74. *Les graphes de Coxeter d'un système de racines irréductible sont parmi les suivants : (insérer dessin).*

Références :

- Caldero, Germoni, H2G2.
- Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation
- Gourdon, Algèbre.
- Grifone, Algèbre linéaire.
- Humphreys, Lie Algebras and Representation Theory.
- Perrin, Cours d'algèbre.
- Tauvel, Algèbre pour l'agrégation.