159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Pandou

10 janvier 2022

Dans cette leçon, E est un K-espace vectoriel de dimension finie.

1 Généralités et définitions

1.1 Formes linéaires

Définition 1. *Une forme linéaire est une application linéaire $f : E \longrightarrow K$. L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^*, c'est le dual de E.*

Exemple 2 : Si $P \in K_n[X]$ et $a \in K$, alors $\mathrm{ev}_a : P \longmapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $K_n[X]$.

Exemple 3 : Si $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application $\mathcal{C}^1$, alors si $a \in U$, $\mathrm{d}f(a)$ est une forme linéaire sur E.

Définition 4. *Un sous-espace H de E est un hyperplan lorsqu'il existe $f \in E^*$ non nul tel que $H = \mathrm{Ker}(f)$.*

Exemple 5 : Dans $\mathbb{R}^n$, $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + ... + x_n = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 6. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ *si, et seulement si,* $\exists \lambda \neq 0, \varphi = \lambda\psi$.

Corollaire 7. *On a une bijection entre E^*/K^* et l'ensemble des hyperplans de E.*

Théorème 8. *H est un hyperplan de E si, et seulement si,* $\dim(H) = n - 1$.

1.2 Base duale

Proposition 9.

$$\dim(E) = \dim(E^*)$$

Proposition 10. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors, la famille de formes linéaires $(e_1^*, ..., e_n^*)$ définie par*

$$\forall j \in [\![1, n]\!], e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

est une base de E^*, appelée base duale de $(e_1, ..., e_n)$.

Exemple 11 : Dans $\mathbb{R}^3$, la base duale de $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, -1)$, $e_3 = (0, 1, 1)$ est

$$\theta_1(x) = x_1 - x_2 + x_3, \qquad \theta_2(x) = x_2 - x_3, \qquad \theta_3(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$$

Exemple 12 : La base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la famille des formes linéaires $u_i : P \longmapsto \dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}$.

Exemple 13 : En calcul différentiel, la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $(\mathrm{d}x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. D'où l'écriture

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x_i$$

Théorème 14. *L'application $x \longmapsto \big(\mu \mapsto \mu(x)\big) \in E^{**}$ est un isomorphisme entre E et son bidual E^{**}.*

Corollaire 15. *Si $(f_1, ..., f_n)$ est une base de E^*, alors il existe une unique base $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que $e_i^* = f_i$. C'est la base antéduale de $(f_1, ..., f_n)$.*

Exemple 16 : Si $x_0, ..., x_n$ sont deux à deux distincts, alors $\big(\mathrm{ev}_{x_i}\big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base du duale de $\mathbb{R}_n[X]$. Sa base antéduale est la base des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points x_i.

1.3 Orthogonalité

Définition 17. *Soit A une partie de E et B une partie de E^*, alors on définit leur orthogonal :*

- $A^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall a \in A, \varphi(a) = 0\} \subset E^*$. *C'est un sous-espace de E^*.*
- $B^0 = \{x \in E, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\} \subset E$. *C'est un sous-espace de E. On parle aussi d'annulateur de B.*

Remarque 18 : φ^0 est le noyau de φ.

Théorème 19. *Si F est un sous-espace de E et G un sous-espace de E^*, alors*

1. $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ *et* $F^{\perp 0} = F$.
2. $\dim(G) + \dim(G^0) = \dim(E)$ *et* $G^{0\perp} = G$.

Corollaire 20. *Soit E un K-espace de dimension n. Alors,*

1. *Si $\varphi_1, ..., \varphi_p$ est une famille de formes linéaires indépendantes, alors $F = \{x \in E, \forall i, \varphi_i(x) = 0\}$ est un espace de dimension $n - p$.*
2. *Si F est un sous-espace de dimension q, alors il existe $n - q$ formes linéaires indépendantes tel que F est l'annulateur de ces formes.*

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 21. *Si $A \in M_n(K)$, on note $f_A : X \longmapsto \mathrm{Tr}(AX)$, alors $A \longmapsto f_A$ est un isomorphisme entre $M_n(K)$ et son dual.*

Application 22 : Tout hyperplan de $M_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

Application 23 : Si $A, B \in M_n(K)$, alors on a équivalence entre :

1. L'équation $AX + XA = B$ admet une solution X.
2. Pour tout $C \in M_n(K)$, $AC + CA = 0 \Longrightarrow \mathrm{Tr}(BC) = 0$.

1.4 Transposition

Définition 24. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit une application linéaire ${}^t u : F^* \longrightarrow E^*$ par*

$$\forall \mu \in F^*, {}^t u(\mu) = \mu \circ u$$

Proposition 25.
1. *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.*
2. *La transposition est une involution.*

Proposition 26. *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors*

1. $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}({}^t u)$.
2. $\mathrm{Im}({}^t u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.
3. $\mathrm{Ker}({}^t u) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.

Proposition 27. *Un sous-espace F de E est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.*

Proposition 28 (Représentation matricielle)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, B_E une base de E et B_F une base de F, alors*

$$\mathrm{Mat}_{B_F^*, B_E^*}({}^t u) = \mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u)^T$$

2 Applications

2.1 Dualité et formes bilinéaires

Proposition 29. *L'application $(\mu, x) \in E^* \times E \longmapsto \mu(x)$ est une forme bilinéaire non dégénérée.*

Proposition 30. *Si φ est une forme bilinéaire non dégénérée, alors l'application $x \in E \longmapsto \big(y \in E \mapsto \varphi(x, y)\big) \in E^*$ est une isomorphisme.*

Remarque 31 : En présence d'une forme bilinéaire non dégénérée, l'orthogonalité au sens de dual coincide avec l'orthogonalité au sens de cette forme bilinéaire.

Application 32 : Si E est un espace euclidien, alors pour toute forme linéaire f, il existe un unique $x \in E$ tel que $\forall y \in E, f(y) = \langle x, y \rangle$.

Définition 33. *Si φ est une forme bilinéaire non dégénérée, alors pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe une unique application, notée u^* telle que*

$$\forall x, y \in E, \varphi\big(u(x), y\big) = \varphi\big(x, u(y)\big)$$

Remarque 34 : Grâce à l'identification de la proposition 30, on a $u^* = {}^t u$.

2.2 Vecteurs propres généralisés

Proposition 34. *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Alors, ils sont tous diagonalisables dans une même base.*

Corollaire 35. *En reprenant la famille précédente, on a une décomposition de l'espace en*

$$E = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{L}(E)^*} E_\mu$$

où

$$E_\mu = \{x \in E, \forall i \in I, u_i(x) = \mu(u_i)x\}$$

2.3 Dualité en analyse et géométrie

On rappelle que nos espaces sont de dimension finie.

Théorème 37 (Hahn-Banach)**.** *Soit p une fonction positivement homogène et sous-additive sur E. Si G est un sous-espace de E et $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire telle que $\forall x \in G, g(x) \leqslant p(x)$.*
Alors, il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g telle que $\forall x \in E, f(x) \leqslant p(x)$.

Remarque 38 : La preuve dans le cas de la dimension quelconque fait appel à l'axiome du choix.

Application 39 : Soit G un sous-espace de E et g une forme linéaire continue, alors il existe une forme linéaire continue f qui prolonge g et qui a même norme que g.

Lemme 40. *Si C est un convexe ouvert non vide et $x_0 \notin C$, alors il existe un hyperplan qui sépare $\{x_0\}$ et C.*

Théorème 41 (Hahn-Banach géométrique)**.** *Soit $A \subset E$ et $B \subset E$ deux convexes non vides disjoints, avec A ouvert. Alors, il existe un hyperplan qui sépare A et B.*

2.4 Dualité en calcul différentiel

Proposition 42. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.*

Exemples 43 :
- Si $N(x) = \|x\|^2$, alors $\nabla N(x) = 2x$.
- Si $f = \det$, alors $\nabla f(M) = \mathrm{Com}(M)$.

Expression matricielle 44 : On a

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 45 (Extrema liés)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g_1, ..., g_k : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On pose*

$$M = \{x \in U, g_1(x) = ... = g_k(x) = 0\}$$

On suppose que $\forall x \in M, \big(\mathrm{d}g_i(x)\big)$ est une famille de formes linéaires indépendantes et que $f_{|M}$ admet un extremum en $a \in M$.
Alors, il existe d'uniques constantes $\lambda_1, ..., \lambda_k$ telles que

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathrm{d}g_i(a)$$

Application 46 : Soit u un endomorphisme auto-adjoint, alors u admet un vecteur propre.

Application 47 : On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|M\|^2 = \mathrm{Tr}(M^T M)$. Alors, on a

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in SL_n(\mathbb{R}), \|M\| \text{ est minimal}\}$$

Références :

- Cognet, Algèbre linéaire.
- Gourdon, Algèbre.
- Grifone, Algèbre linéaire.