158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Pandou

30 mai 2022

Il faut revoir cette leçon en termes de point de vue. Il faut plus mettre l'accent sur les matrices et moins sur l'aspect des formes quadratiques et hermitiennes.

1 Formes quadratiques réelles

1.1 Généralités

Définition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est une forme bilinéaire symétrique si*

1. $\forall x \in E, \varphi(x, \cdot)$ *est linéaire.*
2. $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Une forme quadratique sur E est une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$.

Proposition 2. *Soit q une forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$. φ est appelée la forme polaire de q.*
On a de plus, pour $x, y \in E$,

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big) = \frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y)\big)$$

Exemple 3 :

- Tout produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique. C'est la forme polaire de la norme euclidienne associée.
- $q : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ est une forme quadratique

Définition 4. *Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ. On définit*

1. *le rang de q : comme le rang de $\varphi : x \in E \longmapsto \varphi(x, \cdot) \in E^*$.*
2. *le noyau de q : $\mathrm{Ker}(q) = \{y \in E, \forall x \in E, \varphi(x, y) = 0\}$. On dit que q est non dégénérée si $\mathrm{Ker}(q) = 0$.*

Proposition 5. *Soit q une forme quadratique sur E, on a*

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(q)\big) + \mathrm{rg}(q)$$

Définition 6. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et q une forme quadratique sur E. La matrice de q dans cette base est la matrice $\big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$, où φ est la forme polaire de q.*

Exemple 7 : Pour l'exemple 3, la matrice de q dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 8. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et q une forme quadratique sur E et $x, y \in E$. On écrit X et Y les vecteurs colonnes de x et y dans la base $(e_1, ..., e_n)$ et M la matrice de q dans cette base, alors on a*

$$\varphi(x, y) = X^T M Y$$

Le rang de q est le rang de M.

Proposition 9. *Soit B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B' et q une forme quadratique sur E. On note M la matrice de q dans la base B et M' la matrice de q dans la base B', on a alors*

$$M' = P^T M P$$

On dit que M et M' sont congruentes.

Remarque 10 : On définit une action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ par $P \cdot M = P^T M P$. La classification des formes quadratiques est l'étude des orbites pour cette action.

1.2 Formes hermitiennes

Définition 11. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que φ est une forme sesquilinéaire hermitienne si :*

1. $\forall x \in E, \varphi(x, \cdot)$ *est linéaire.*
2. $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.

Une forme hermitienne sur E est une application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle qu'il existe une forme sesquilinéaire hermitienne φ telle que $\forall x \in E, \Phi(x) = \varphi(x, x)$.

Proposition 12. *Soit Φ une forme hermitienne sur E. Il existe une unique forme sesqulinéaire hermitienne φ telle que $\forall x \in E, \Phi(x) = \varphi(x, x)$. φ est appelée la forme polaire de Φ.*
On a de plus, pour $x, y \in E$,

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\big(\Phi(x+y) - \Phi(x-y) + i\Phi(x-iy) - i\Phi(x+iy)\big)$$

Exemple 13 :

- Tout produit hermitien sur E est une forme sesquilinéaire hermitienne. C'est la forme polaire de la norme hermitienne associée.
- $\Phi : (x,y) \in \mathbb{C}^2 \longmapsto 2\overline{x_1}y_1 - 3i\overline{x_1}y_2 + 3i\overline{x_2}y_1 + 3\overline{x_2}y_2$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$.

Définition 14. *Soit Φ une forme hermitienne sur E de forme polaire φ. On définit*

1. *le rang de Φ : comme le rang de $\varphi : x \in E \longmapsto \varphi(x,\cdot) \in E^{\overline{*}}$ où $E^{\overline{*}}$ est l'espace des formes antilinéaires.*
2. *le noyau de Φ : $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{y \in E, \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0\}$. On dit que Φ est non dégénérée si $\mathrm{Ker}(\Phi) = 0$.*

Proposition 15. *Soit Φ une forme hermitienne sur E, on a*

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(\Phi)\big) + \mathrm{rg}(\Phi)$$

Définition 16. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et Φ une forme hermitienne sur E. La matrice de q dans cette base est la matrice $\big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in H_n(\mathbb{C})$, où φ est la forme polaire de Φ.*

Exemple 17 : Dans l'exemple 3, la matrice de Φ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & -3i \\ 3i & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 18. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et Φ une forme hermitienne sur E et $x, y \in E$. On écrit X et Y les vecteurs colonnes de x et y dans la base $(e_1, ..., e_n)$ et M la matrice de Φ dans cette base, alors on a*

$$\varphi(x,y) = X^*MY$$

où X^* est la transconjuguée de X.
De plus, le rang de Φ est le rang de M.

Proposition 19. *Soit B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B' et Φ une forme hermitienne sur E. On note M la matrice de Φ dans la base B et M' la matrice de Φ dans la base B', on a alors*

$$M' = P^*MP$$

où P^* est la transconjuguée de P.
On dit que M et M' sont congruentes hermitiennes.

Remarque 20 : On définit une action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $H_n(\mathbb{C})$ par $P \cdot M = P^*MP$. La classification des formes hermitiennes est l'étude des orbites pour cette action.

1.3 Orthogonalité

On fixe E un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et on fixe Φ une forme quadratique (resp. hermitienne) sur E, de forme polaire φ.

Définition 21. *Le cône isotrope de Φ est $C(\Phi) = \{x \in E, \Phi(x) = 0\}$. On dit que Φ est anisotrope si $C(\Phi) = 0$.*

Proposition 22.

$$\mathrm{Ker}(\Phi) \subset C(\Phi)$$

Remarque 23 : La réciproque est fausse. Par exemple $\Phi(x,y) = x^2 - y^2$ est non dégénérée, mais $C(\Phi)$ est la réunion de deux droites.

Définition 24. *Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux pour Φ si $\varphi(x,y) = 0$. Soit $A \subset E$, l'orthogonal de Φ est $A^\perp = \{y \in E, \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$.*
Une base $(e_1, ..., e_n)$ de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, \varphi(e_i,e_j) = 0$.

Proposition 25.

$$F \subset F^{\perp\perp} \qquad \text{et} \qquad A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$$

Théorème 26. *Il existe toujours une base Φ-orthogonale de E.*

Corollaire 27. *Soit $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) symétrique réelle ou hermitienne complexe. Alors, il existe une matrice diagonale qui est congruente (resp. congruente hermitienne) à A.*

Algorithme 28 : (Gauss) On écrit $\Phi(x_1, ..., x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i<j} a_{i,j}x_ix_j$.

- Si $a_{1,1} \neq 0$, on écrit $\Phi(x_1, ..., x_n) = ax_1^2 + x_1B(x_2, ..., x_n) + C(x_2, ..., x_n)$, alors on écrit

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = a\left(x_1 + \frac{B(x_2, ..., x_n)}{2a}\right)^2 + C(x_2, ..., x_n) - \frac{B(x_2, ..., x_n)^2}{4a}$$

  et on itère sur $C - \dfrac{B^2}{4a}$.
- Si tous les $a_{i,i} = 0$, on écrit $\Phi = ax_1x_2 + x_1B(x_3, ..., x_n) + x_2C(x_3, ..., x_n) + D(x_3, ..., x_n)$, alors on écrit

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, ..., x_n) &= a\left(x_1 + \frac{C}{a}\right)\left(x_2 + \frac{B}{a}\right) + D - \frac{BC}{a} \\ &= \frac{a}{4}\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a}\right)^2\right] + D - \frac{BC}{a}\end{aligned}$$

  et on itère sur $D - \dfrac{BC}{a}$.

Dans le cas hermitien, on peut appliquer le même algorithme en remplaçant les carrés par les carrés des modules.

Proposition 29. *Soit F un sous-espace de E, alors on a*

1. $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E) + \dim\big(F \cap \mathrm{Ker}(\Phi)\big)$.
2. $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Proposition 30. *Soit F un sous-espace de E, alors*

1. *Si $\Phi_{|F}$ est anisotrope, alors $F \oplus F^{\perp} = E$.*
2. *Si Φ est anisotope, alors $F = F^{\perp\perp}$.*

2 Réduction des formes quadratiques et hermitiennes

2.1 Théorème de Sylvester réel

Ici, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 31. *Soit q une forme quadratique. On dit que q est définie positive si*

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) > 0$$

Définition 32. *Soit q une forme quadratique. On note r la dimension maximale d'un sous-espace F tel que $q_{|F}$ est définie positive et s la dimension maximale d'un sous-espace G telle que $q_{|G}$ est définie négative.*
Le couple (r, s) est appelée signature de q.

Théorème 33 (Sylvester)**.** *Soit q une forme quadratique de signature (r, s), il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est* $\mathrm{diag}(I_r, -I_s, 0)$.

Application 34 : Si q est anisotrope, alors q est soit positive, soit négative.

Corollaire 35. *q de signature (r, s) est non dégénérée si, et seulement si,* $r+s = \dim(E)$.

Définition 36. *Soit r, s deux entiers tels que $r + s = n$, on définit*

$$O(r, s) = \left\{M \in GL_n(\mathbb{R}), M^T I_{r,s} M = I_{r,s}\right\}$$

et on pose

$$SO(r, s) = \{M \in O(r, s), \det(M) = 1\}$$

Proposition 37. *$O(r, s)$ et $SO(r, s)$ sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ stables par transposition.*

Remarque 38 : $O(r, s)$ est isomorphe au groupe des endomorphismes qui préserve une forme quadratique de signature (r, s).

2.2 Théorème de Sylvester complexe

Ici, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 39. *Soit Φ une forme hermitienne, on dit qu'elle est définie positive si*

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \Phi(x) \in]0, +\infty[$$

Définition 40. *Soit Φ une forme hermitienne. On note r la dimension maximale d'un sous-espace F tel que $\Phi_{|F}$ est définie positive et s la dimension maximale d'un sous-espace G telle que $\Phi_{|G}$ est définie négative.*
Le couple (r, s) est appelée signature de Φ.

Théorème 41 (Sylvester)**.** *Soit Φ une forme hermitienne de signature (r, s), il existe une base de E dans laquelle la matrice de Φ est* $\mathrm{diag}(I_r, -I_s, 0)$.

Définition 42. *Soit r, s deux entiers tels que $r + s = n$, on définit*

$$U(r, s) = \{M \in GL_n(\mathbb{C}), M^* I_{r,s} M = I_{r,s}\}$$

et on pose

$$SU(r, s) = \{M \in U(r, s), \det(M) = 1\}$$

Proposition 43. *$U(r, s)$ et $SU(r, s)$ sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ stables par transconjugaison.*

Remarque 44 : $U(r, s)$ est isomorphe au groupe des endomorphismes qui préserve une forme hermitienne de signature (r, s).

2.3 Espaces euclidiens et hermitiens

Définition 45. *Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.*
Un produit hermitien sur E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Dans la suite, on fixe un espace euclidien ou hermitien E de dimension n.

Proposition 46 (Orthonormalisation de Schmidt)**.** *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, alors il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de E telle que* $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_i)$.

Proposition 47 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

$$\forall x, y \in E, \left|\langle x, y\rangle\right| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Définition 48. *On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives (en tant que formes quadratiques) et $H_n^{++}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives (en tant que formes hermitiennes).*

Proposition 49. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ (ou $H_n(\mathbb{C})$), alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (ou $H_n^{++}(\mathbb{C})$) si, et seulement si,* $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$.

Remarque 50 : Un élément de S_n^{++} ou H_n^{++} défini un produit scalaire (ou hermitien) sur K^n.

2.4 Endomorphismes auto-adjoints

Définition 51. *Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est auto-adjoint si*

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

Proposition 52. *Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint et B une base orthonormée de E. Alors, la matrice de u dans la base B est symétrique réelle (resp. hermitienne complexe).*

Lemme 53. *Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Si F est un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.*

Théorème 54 (spectral)**.** *Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Alors, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u et ses valeurs propres sont toutes réelles.*

Corollaire 55. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in H_n(\mathbb{C})$), alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ (resp. $P \in U_n(\mathbb{C})$) et une matrice diagonale réelle D telles que*

$$A = PDP^{-1} = PDP^*$$

Corollaire 56. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$) et $B \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $B \in H_n(\mathbb{C})$), alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $P \in GL_n(\mathbb{C})$) et D une matrice diagonale réelle telles que*

$$A = PP^* \quad \text{et} \quad B = PDP^*$$

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 57.
1. *$S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.*
2. *L'application $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \longmapsto A^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*

3 Applications

3.1 Calcul différentiel

Définition 58. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$. On dit que $a \in U$ est un point critique de f si $\mathrm{d}f(a) = 0$.*

Proposition 59. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$, tout extremum de f sur U est un point critique de f.*

Lemme 60 (Schwarz)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}^2 f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique réelle.*

Théorème 61. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f.*
1. *Si a est un minimum local de f, alors $\mathrm{d}^2 f(a) \geqslant 0$.*
2. *Si $\mathrm{d}^2 f(a) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a.*

Exemple 62 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f. On note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \qquad \text{et} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

- Si $rt - s^2 > 0$, alors a est un minimum (resp. maximum) local strict de f si $r > 0$ (resp. si $r < 0$).
- Si $rt - s^2 < 0$, a n'est pas un extremum de f : on dit que a est un point col.
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 63. *Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : M \in V \longmapsto \varphi(M) \in GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que*

$$\forall M \in V, \varphi(M) = M^T A_0 M$$

Théorème 64 (Lemme de Morse)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ tel que 0 est un point critique de f et $\mathrm{d}^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$.*
Alors, il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$$

Application 65 : Les points critiques non dégénéres d'une fonction $\mathcal{C}^3$ sont isolés.

3.2 Recherche d'extrema

Lemme 66 (Kantorovitch)**.** *Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $x \neq 0$, alors*

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2 \|x\|_A^2} \geqslant 4 \frac{\lambda_{\max}\lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}$$

Théorème 67 (Descente de gradient à pas optimal)**.** *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On note $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} x^T A x - x^T b$. Alors,*
1. *Φ atteint son minimum en un unique point $\overline{x}$.*
2. *On définit une suite en posant $x_0 \neq \overline{x}$ et $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\Phi(x_k)$ où $\alpha_k = \dfrac{\|\nabla\Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\Phi(x_k)\|_A^2}$. Alors, (x_k) converge vers $\overline{x}$.*

3. *De plus, on a*

$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \right)^{k+1} \|x_0 - \overline{x}\|$$

4. *Enfin, soit (x_k) est stationnaire à partir du rang 1, soit $x_k \neq x_{k+1}$ pour tout k.*

Remarque 68 : Le point $\overline{x}$ est solution de l'équation $A\overline{x} = b$.

3.3 Isomorphismes exceptionnels

Théorème 69 (Admis)**.** *$SL_2(\mathbb{C})$ et $SO(3,1)$ sont des sous-variétés différentielles de $M_4(\mathbb{R})$ de même dimension.*

DEVELOPPEMENT 3

Lemme 70. 1. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall H \in H_n(\mathbb{C}), AHA^* = H$, alors A est une homothétie.*

2. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall H \in H_n(\mathbb{C}), MH + HM^* = 0$, alors $M = 0$.*

Théorème 71. *On a un difféomorphisme*

$$PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_0(3,1)$$

Remarque 72 : En étudiant d'autres actions de groupes, on peut trouver d'autres isomorphismes exceptionnels :
- $PSL_2(\mathbb{R}) \simeq SO_0(2,1)$.
- $PSU_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

Références :

- Caldero, Germoni, H2G2.
- Gourdon, Algèbre.
- Grifone, Algèbre linéaire.