157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Pandou

27 mars 2022

On fixe un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps K.

1 Endormophismes nilpotents

1.1 Définitions et caractérisations

Définition 1. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0$. Le plus petit entier n tel que $u^n = 0$ est appelé indice de nilpotence de u.*
On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

Exemple 2 : Les endomorphismes associés à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ sont nilpotents.

Proposition 3. *u est nilpotent si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n(x) = 0$.*

Exemple 4 : La dérivation est nilpotente sur $K_n[X]$. Ce même exemple montre que l'hypothèse de dimension finie est primordiale.

Proposition 5. *Soit u nilpotent d'indice p, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\big(x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0)\big)$ est libre.*

Corollaire 6. *L'indice de nilpotence est majoré par n, la dimension de E.*

Théorème 7. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, on a équivalence entre :*

1. *u est nilpotent.*
2. *$\chi_u(X) = X^n$.*
3. *$\mu_u(X) = X^p$ où p est l'indice de nilpotence de u.*
4. *Si K est algébriquement clos, 0 est la seule valeur propre de u.*

Remarque 8 : Le dernier point est faux si K n'est pas algébriquement clos : dans $M_n(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a 0 pour unique valeur propre, mais n'est pas nilpotent.

Corollaire 9. *Si K est de caractéristique nulle, alors u est nilpotent si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Remarque 10 : Si K est de caractéristique p, le résultat est faux. Par exemple, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{F}_2$ vérifie $M^2 = I_2$ et donc $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$, pourtant M n'est pas nilpotente.

Application 11 : Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall g \in G, g^n = 1$. Si $(g_1, ..., g_p)$ est une base de $\mathrm{Vect}(G)$, alors

$$g \longmapsto \big(\mathrm{Tr}(gg_1), ..., \mathrm{Tr}(gg_p)\big) \in \mathbb{C}^p$$

est injective. On en déduit que G est fini.

Proposition 12. *Soit u nilpotent et F un sous-espace stable par u, alors $u_{|F}$ est nilpotent.*

1.2 Cône nilpotent

Proposition 13. *Si u est nilpotent et $\lambda \in K$, alors λu est nilpotent.*

Proposition 14. *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, si u et v commutent et sont nilpotents, alors $u + v$ et $u \circ v$ sont nilpotents.*

Contre-exemple 15 : La commutativité est primordiale : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 16. *L'espace vectoriel engendré par les endomorphismes nilpotents est l'espace des endomorphismes de trace nulle.*

Application 17 : On peut dessiner le cône des matrices nilpotentes de taille 2 comme étant le cône d'équation $\{x^2 + yz = 0\}$ (voir figure 1).

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 18 (Décomposition de Fitting). *L'application $u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto (F, G, u_{|F}, u_{|G})$ à valeurs dans l'ensemble des quadruplets (F, G, v, w) tels que*

1. *$E = F \oplus G$.*
2. *$v \in \mathcal{N}(F)$.*
3. *$w \in GL(G)$.*

est une bijection.

Application 19 : Dans $M_n(\mathbb{F}_q)$, il y a $q^{n(n-1)}$ matrices nilpotentes.

1.3 Endomorphismes unipotents

Définition 20. *On dit qu'un endomorphisme u est unipotent si $u - \mathrm{Id}$ est nilpotent. On note $\mathcal{U}(E)$ l'ensemble des endomorphismes unipotents.*

Théorème 21. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors on a équivalence entre :*

1. *u est unipotent.*
2. *$\chi_u(X) = (X-1)^n$.*
3. *$\mu_u(X) = (X-1)^p$ où p est l'indice de nilpotence de $u - \mathrm{Id}$.*
4. *Si K est algébriquement clos, 1 est la seule valeur propre de u.*

Définition 22. *Si u est nilpotente, alors on définit*

$$\log(\mathrm{Id} + u) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n}$$

Théorème 23. $\exp : \mathcal{N}(E) \longrightarrow \mathcal{U}(E)$ *et* $\log : \mathcal{U}(E) \longrightarrow \mathcal{N}(E)$ *sont des applications réciproques l'une de l'autre. Ce sont même des homéomorphismes.*

1.4 Topologie

Proposition 24. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est nilpotent si, et seulement si, 0 est adhérent à la classe de conjugaison de u.*

Proposition 25. *$\mathcal{N}(E)$ est fermé et d'intérieur vide.*

2 Endomorphismes trigonalisables

2.1 Définitions et caractérisations

Définition 26. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire.*

Remarque 27 : Triangulaire supérieure ou inférieure n'importe pas car toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 28. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors on a équivalence entre :*

1. *u est trigonalisable.*
2. *χ_u est scindé.*
3. *μ_u est scindé.*
4. *u admet un polynôme annulateur scindé.*

Exemples 29 :

- $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable car $\chi_{M_1} = (X-2)^2(X-3)$.
- $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable car $\chi_{M_2} = (X-1)^3$.

Corollaire 30. *Si K est algébriquement clos, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.*

Application 31 : Si $K = \mathbb{C}$, l'ensemble des endormophismes diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Proposition 32. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u, alors si u est trigonalisable, alors $u_{|F}$ est trigonalisable.*

Application 33 : Cette proposition a un intérêt pratique pour trouver une base de trigonalisation. Si on a un vecteur propre v de u, soit H un supplémentaire à Kv et p la projection sur H parallèlement à v, alors $p \circ u_{|H}$ est encore trigonalisable et on peut de nouveau chercher un vecteur propre de $p \circ u_{|H}$.

Théorème 34. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux, alors (u_i) sont trigonalisables dans une même base.*

Lemme 35. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et unitaire. Alors, P est scindé si, et seulement si, $\forall z \in \mathbb{C}, \left|P(z)\right| \geqslant \left|\mathrm{Im}(z)\right|^n$.*

Théorème 36. *On suppose que $K = \mathbb{R}$, alors l'ensemble des endomorphismes trigonalisables est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.*
L'adhérence de l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est l'ensemble des endomorphismes trigonalisables.

3 Réduction

3.1 Décomposition de Dunford

Lemme 37 (des noyaux)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, ..., P_r \in K[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$, alors*

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(P_i(u)\big)$$

De plus, les projecteurs sur $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Ker}\big(P_j(u)\big)$ sont des polynômes en u.

Théorème 38. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable (ie χ_u est scindé). Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que*

1. *d est diagonalisable.*
2. *n est nilpotent.*
3. *$[d, n] = 0$.*
4. *$u = d + n$.*

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Application 39 : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ dont le seul élément nilpotent est 0, alors $\mathcal{A}$ est codiagonalisable.

Corollaire 40. *Soit $f \in GL(E)$ trigonalisable (ie χ_f est scindé). Il existe un unique couple (d, u) d'endomorphismes tels que*

1. *d est diagonalisable.*
2. *u est unipotent.*
3. *$[d, u] = 0$.*
4. *$f = d \circ u$.*

Application 41 : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

3.2 Réduction de Jordan

Définition 42. *Un bloc de Jordan de taille n est* $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 43. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n, alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est J_n.*

Théorème 44. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors, il existe une unique partition $n_1 \geqslant ... \geqslant n_p$ de n et une base dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(J_{n_1}, ..., J_{n_p})$.*
L'entier n_1 est l'indice de nilpotence de u et on a même plus précisément

$$n_j = 2\dim\left(\mathrm{Ker}(u^j)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(u^{j-1})\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(u^{j+1})\right)$$

Application 45 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, u et $2u$ sont semblables.

Théorème 46. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable (ie χ_u est scindé). On note $J_n(\lambda) = \lambda I_n + J_n$. Alors, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), ..., J_{n_p}(\lambda)_p)$ où $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.*

Application 47 : Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

3.3 Vers les algèbres de Lie

Définition 48. *Une algèbre de Lie est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ antisymétrique et qui vérifie l'identité de Jacobi*

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$$

Si $x \in \mathfrak{g}$, on définit $\mathrm{ad}(x) : y \in \mathfrak{g} \longmapsto [x, y] \in \mathfrak{g}$. Le centre de $\mathfrak{g}$ est $Z(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$.

Exemples 49 :
- $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ est une algèbre de Lie (où $\wedge$ est le produit vectoriel).
- $\mathcal{L}(V)$ muni du crochet naturel $[u, v] = u \circ v - v \circ u$ est une algèbre de Lie notée $\mathfrak{gl}(V)$.

Proposition 50. *Si $x, y \in \mathfrak{g}$, alors*

$$\mathrm{ad}\big([x, y]\big) = \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big]$$

où le second crochet est celui de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 51. *Soit $x \in \mathfrak{gl}(V)$, alors on a équivalence entre :*
1. *x est diagonalisable (resp. nilpotent).*
2. *$\mathrm{ad}(x)$ est diagonalisable (resp. nilpotent).*

Théorème 52 (Engel)**.** *Soit V un espace de dimension finie et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ constitué seulement d'éléments nilpotents, alors $\mathfrak{g}$ est cotrigonalisable.*

Définition 53. *On dira que $x \in \mathfrak{g}$ est diagonalisable (resp. nilpotent) lorsque $\mathrm{ad}(x)$ est diagonalisable (resp. nilpotent).*

Définition 54. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall x_1, ..., x_n \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{g}, \mathrm{ad}(x_1) \circ ... \circ \mathrm{ad}(x_n) \cdot y = 0$$

Proposition 55. *Si $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ est nilpotente, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Théorème 56 (Engel, v2)**.** *$\mathfrak{g}$ est nilpotente si, et seulement si, tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sont nilpotents.*

4 Annexe

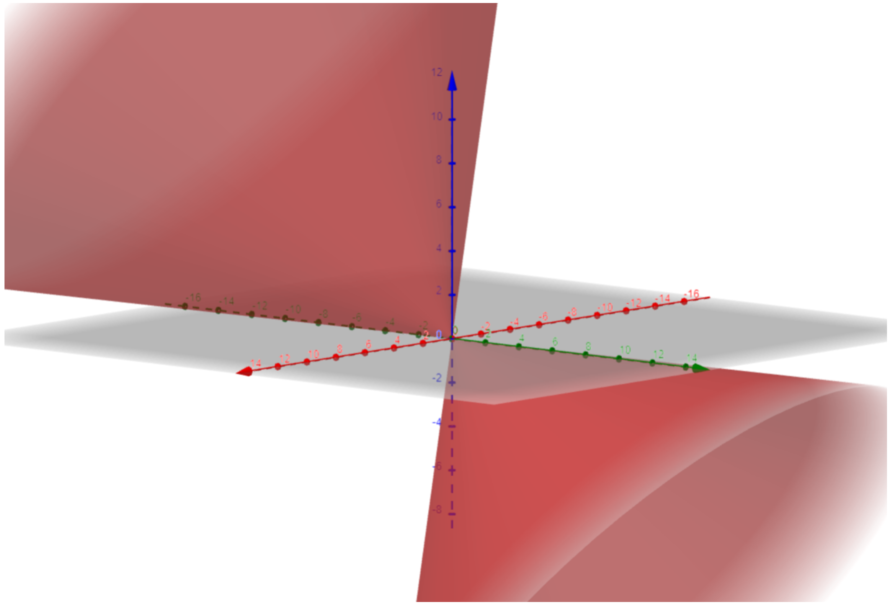

Figure 1 – Cône nilpotent $\{x^2 + yz = 0\}$.

Références :

- Caldero, Germoni, H2G2.
- Cognet, Algèbre linéaire.
- Gourdon, Algèbre.
- Humphreys, Lie Algebras and Representation Theory.