156 : Exponentielle de matrices. Applications

Pandou

27 décembre 2021

Dans ce cours, on se fixe une norme $\|\cdot\|$ sur K^n ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et on note $\|\cdot\|$ sa norme subordonnée sur $M_n(K)$.

1 Définitions et propriétés algébriques

1.1 Généralités

Proposition 1. *Soit* $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *la somme d'une série entière de rayon* $R > 0$. *Alors, si* $A \in M_n(K)$ *vérifie* $\|A\| < R$, *la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n A^n$ *converge dans* $M_n(K)$. *De plus,*

$$A \in B(0,R) \subset M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n A^n$$

est continue.

Définition 2. *Soit* $A \in M_n(K)$. *L'exponentielle de* A, *notée* $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$, *est bien définie.*

Proposition 3. $\exp : A \in M_n(K) \longmapsto \exp(A)$ *est continue.*

Proposition 4. *Soit* $P \in GL_n(K)$ *et* $A \in M_n(K)$, *alors*

$$\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}\exp(M)P$$

Proposition 5. *Si* $A, B \in M_n(K)$ *commutent, alors*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$$

Remarque 6 : Si A, B ne commutent plus, le résultat est faux. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 7. *Si* $A \in M_n(K)$, *alors* $\exp(A) \in GL_n(K)$ *et* $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Proposition 8. *Soit* $A \in M_n(K)$, *alors* $\exp(A)$ *est un polynôme en* A.

Remarque 9 : Il n'existe pas de polynôme $P \in K[X]$ tel que $\forall A \in M_n(K), \exp(A) = P(A)$.

Proposition 10. *Soit* $A \in M_n(K)$, $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

Remarque 11 : $\exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

1.2 Calculs

Proposition 12. *Si* $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, *alors* $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$. *Si* N *est nilpotente, alors* $\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$.

Proposition 13. *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Proposition 14 (Exponentielle et décomposition de Jordan)**.** *Soit* $J =$

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \lambda \end{pmatrix}$ *un bloc de Jordan de taille n, alors*

$$\exp(J) = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \frac{1}{2} \\ & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 \dots & & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Exemple 14 : Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Si $A = \lambda I_2$, alors $\exp(A) = e^{\lambda} I_2$.
2. Si $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, alors $\exp(A) \sim e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Si $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, alors $\exp(A) \sim \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{pmatrix}$.
4. Si $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, alors $\exp(A) \sim e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$.

Proposition 15 (Exponentielle et décomposition de Dunford)**.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford avec D diagonalisable et N nilpotente, alors la décomposition de Dunford de e^A est*

$$e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$$

Corollaire 16. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable si, et seulement si, $\exp(A)$ est diagonalisable.*

2 Exponentielle et topologie

2.1 Injectivité et surjectivité

Corollaire 17. *On observe que* exp *n'est pas injective, en effet*

$$e^M = I_n \iff M \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp} \subset 2i\pi\mathbb{Z}$$

Théorème 18. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^{P(A)} = A$.*

Corollaire 19. $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*

Théorème 20.

$$\exp\big(M_n(\mathbb{R})\big) = \big\{M^2, M \in M_n(\mathbb{R})\big\}$$

2.2 Homéomorphismes

Théorème 21. $\exp : M_n(K) \longrightarrow GL_n(K)$ *est une application $\mathcal{C}^1$ et* $\mathrm{d}\exp(0) = I_n$.

Corollaire 22. exp *réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre un voisinage de* 0 *dans $M_n(K)$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(K)$.*

Corollaire 23. *$GL_n(K)$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petits, ie il existe un voisinage V de I_n dans $GL_n(K)$ tel que le seul sous-groupe de $GL_n(K)$ inclus dans V soit trivial.*

Théorème 24. *Soit $N \subset M_n(K)$ le cône des matrices nilpotentes et $U \subset M_n(K)$ le groupe des matrices unipotentes.* exp *réalise un homéomorphisme entre N et U, dont l'inverse est donné par $L : A \in B(I_n, 1) \longmapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{(A - I_n)^p}{p}$.*

Théorème 25. exp *induit un homéomorphisme entre $H_n(\mathbb{C})$ et $H_n^{++}(\mathbb{C})$.*

Corollaire 26. *On a un homéomorphisme*

$$GL_n(\mathbb{C}) \simeq U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

2.3 Application aux systèmes différentiels

Théorème 27. *Soit $A : I \longrightarrow M_n(K)$ et $B : I \longrightarrow K^n$ des applications continues. Pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times K^n$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{rcl} Y' & = & A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array} \right.$ définie sur I tout entier.*

Théorème 28. *Soit $(t_0, Y_0) \in I \times K^n$ et $A \in M_n(K)$ et $B : I \longrightarrow K^n$ continue. Alors,*

1. *La solution sur $\mathbb{R}$ de $\left\{ \begin{array}{rcl} Y' & = & AY \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array} \right.$ est*

$$Y : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{(t-t_0)A} Y_0$$

2. *La solution sur I de* $\left\{\begin{array}{lll} Y' & = & AY + B(t) \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array}\right.$ *est*

$$Y : t \in I \longmapsto e^{(t-t_0)A}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A}B(u)\mathrm{d}u$$

Remarque 29 : On a tracé les portraits de phase de l'équation $Y' = AY$ quand $n = 2$ en annexe.

Théorème 30 (Lyapounov)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ avec $f(0) = 0$. On considère le système* $\left\{\begin{array}{lll} X' & = & f(X) \\ X(0) & = & X_0 \end{array}\right.$.
Si $\mathrm{Sp}(\mathrm{d}f(0)) \subset \mathbb{R}^* + i\mathbb{R}_-$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|X_0| < \varepsilon$, alors l'unique solution X est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = 0$.

3 Vers les groupes de Lie

3.1 Sous-groupes à un paramètre de $GL_n(K)$

Définition 31. *Un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(K)$ est un morphisme continue de $\mathbb{R} \longrightarrow GL_n(K)$.*

Théorème 32. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(K)$ un sous-groupe à un paramètre, alors il existe un unique $X \in M_n(K)$ tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = e^{tX}$$

DEVELOPPEMENT 1

Application 33 : Soit $\varphi : U(1) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu, alors il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $k_1, ..., k_r \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\varphi : e^{it} \in U(1) \longmapsto Q\mathrm{diag}(R_{k_1 t}, ..., R_{k_r t}, 1, ..., 1)Q^{-1}$$

où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

3.2 Sous-groupes fermés de $GL_n(K)$

Définition 34. *Si $A \in B(I_n, 1)$, on définit le logarithme de A par* $\mathrm{Log}(A) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{(A - I_n)^p}{p}$.

Lemme 35. *Soit $X, Y \in M_n(K)$, alors*

$$\exp(X + Y) = \lim_{n \to +\infty} \left[\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right]^n$$

et,

$$\exp([X, Y]) = \lim_{n \to +\infty} \left[\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\exp\left(-\frac{X}{n}\right)\exp\left(-\frac{Y}{n}\right)\right]^{n^2}$$

Définition 36. *Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(K)$, on pose $\mathfrak{g} = \{X \in M_n(K), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in G\}$. C'est l'algèbre de Lie de G.*

Proposition 37. *$\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ stable par $[\cdot, \cdot]$.*

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 38. *Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(K)$, il existe un voisinage V de O dans $\mathfrak{g}$, un voisinage W de I_n dans G tels que $\exp_{|V} : V \longrightarrow W$ réalise un homéomorphisme.*

Lemme 39. *Si G est non discret, soit (h_p) une suite d'éléments de G tendant vers I_n tel que $h_p \neq I_n$. Si h est une valeur d'adhérence de $\left(\frac{\mathrm{Log}(h_p)}{\|\mathrm{Log}(h_p)\|}\right)$, alors $h \in \mathfrak{g}$.*

Proposition 40.

$$\mathfrak{g} = T_{I_n}G$$

Exemples 41 :

- $\mathfrak{sl}(n)$ est le K-espace des matrices de trace nulle.
- $\mathfrak{so}(n)$ est le K-espace des matrices antisymétriques.
- $\mathfrak{t}(n)$ (algèbre de Lie des matrices unipotentes) est le K-espace des matrices triangulaires supérieures strictes.
- $\mathfrak{su}(n)$ est le $\mathbb{R}$-espace des matrices antihermitiennes de trace nulle.

Remarque 42 : En tant qu'algèbres de Lie réelles, on a $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$.

Références :

- Gourdon, Algèbre.
- Gourdon, Analyse.
- Mneimé, Testard, Introduction aux groupes de Lie classiques.
- Rombaldi, Algèbre et géométrie.