155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Pandou

21 mai 2022

On fixe un K-espace vectoriel E de dimension n.

1 Éléments propres

1.1 Valeur propre, espaces propres

Définition 1. *Soit $\lambda \in K$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que λ est une valeur propre de u s'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
On note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. Et $E_\lambda(u)$ l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Remarque 2 : Si $A \in M_n(K)$, une valeur propre de A est une valeur propre de l'endomorphisme $X \longmapsto AX$.

Exemples 3 :
- Une homothétie n'a qu'une seule valeur propre et son espace propre est E tout entier.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre réelle.
- 1 est valeur propre si, et seulement si, les points fixes de u forment un sous-espace non trivial.

Proposition 4. *Soit $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathrm{Sp}(u)$ des valeurs propres distinctes, alors la somme $\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$ est toujours directe.*

1.2 Polynôme caractéristique

Définition 5. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u est le polynôme $\chi_u(X) = \det(X\mathrm{Id} - u)$.*

Remarque 6 :
- Soit $A \in M_n(K)$, alors la polynôme caractéristique de A est le polynôme caractéristique de $X \longmapsto AX$.
- Deux matrices sont semblables ont même polynôme caractéristique.
- Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.

Exemple 7 : Si $\dim(E) = 2$, alors $\chi_u(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(u)X + \det(u)$.

Proposition 8. *Les racines de χ_u forment exactement le spectre de u. La multiplicité d'une racine de χ_u est alors appelée multiplicité algébrique de la valeur propre.*

Corollaire 9. *Si K est algébriquement clos, alors tout endomorphisme a au moins un valeur propre.*

Exemple 10 : Les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ sont 2 et 3.

Corollaire 11. *Un endomorphisme u a au plus n valeurs propres.*

Proposition 12. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.*

Application 13 : Si u est nilpotent, alors $\chi_u = X^n$.

1.3 Diagonalisabilité

Définition 14. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de vecteurs propres de u. Alors, la matrice de u dans une telle base est diagonale.*

Remarque 15 : $A \in M_n(K)$ est diagonalisable si, et seulement si, A est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 16. *Si χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.*

Remarque 17 : La réciproque est fausse : toute homothétie est diagonalisable, mais $\chi_u = (X - \lambda)^n$.

Proposition 18. *Soit λ une valeur propre de u de multiplicité algébrique m_λ, alors*

$$\dim\big(E_\lambda(u)\big) \leqslant m_\lambda$$

Théorème 19. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a alors équivalence entre :*

1. *u est diagonalisable.*

2. *χ_u est scindé sur K et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim\big(E_\lambda(u)\big) = m_\lambda$.*
3. *$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.*
4. *$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big)$.*

Méthode 20 : (Diagonalisation effective) On cherche à diagonaliser une matrice A.
- Calcul de χ_A, détermination des valeurs propres de A et de leur multiplicité algébrique.
- Pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, résoudre $AX = \lambda X$.
- En déduire la dimension et une base de $E_\lambda(A)$. Si la dimension coincide avec la multiplicité algébrique, A est diagonalisable, sinon, A n'est pas diagonalisable.
- Mettre les vecteurs trouvés précédemment dans les colonnes d'une matrice $P \in GL_n(K)$. Calculer P^{-1}.
- La matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Application 21 : Calcul des puissances d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

2 Polynômes d'endomorphismes

2.1 Généralités, polynôme minimal

Proposition 22. *Soit $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est valeur propre de P.*

Remarque 23 : La réciproque est bien entendue fausse, mais la recherche de polynômes annulateurs donne des informations sur u.

Définition 24. *$\{P \in K[X], P(u) = 0\}$ est un idéal de $K[X]$ engendré par un unique polynôme unitaire, noté μ_u et appelé polynôme minimal de u.*

Remarque 25 :
- $K[u] = \{P(u), P \in K[X]\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\deg(\mu_u)$.
- Le polynôme minimal de $A \in M_n(K)$ est le polynôme minimal de $X \longmapsto AX$.

Proposition 26. *Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.*

Remarque 27 : La réciproque est fausse : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{diag}(A, 0)$ et $\mathrm{diag}(A, A)$ ont même polynôme minimal X^2, mais n'ont pas même rang.

Proposition 28. *Les racines de μ_u sont exactement les valeurs propres de u.*

Proposition 29. *Soit $P \in K[X]$, alors u et $P(u)$ commutent. En particulier,* $\mathrm{Ker}\big(P(u)\big)$ *et* $\mathrm{Im}\big(P(u)\big)$ *sont stables par u.*

Lemme 30. *Soit F un sous-espace stable par u, alors $\mu_{u_{|F}}$ divise μ_u.*

Proposition 31. *Soit F et G stables par u tels que $E = F \oplus G$, alors $\mu_u =$* $\mathrm{ppcm}\big(\mu_{u_{|F}}, \mu_{u_{|G}}\big)$.

Théorème 32 (Cayley-Hamilton)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\chi_u(u) = 0$.*

2.2 Critère de diagonalisabilité

Théorème 33 (Lemme des noyaux)**.** *Soit $P_1, ..., P_r \in K[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 ... P_r$, alors*

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(P_i(u)\big)$$

Application 34 : On note $E'_\lambda(u) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}\big((u - \lambda \mathrm{Id})^k\big)$, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E'_\lambda(u)$$

Théorème 35. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :*
1. *u est diagonalisable.*
2. *μ_u est scindé à racines simples.*
3. *u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.*

Corollaire 36. *Soit F un sous-espace stable par u, on suppose que u est diagonalisable, alors $u_{|F}$ est aussi diagonalisable.*

Remarque 37 : Ce dernier résultat a l'air anodin, mais est non trivial sans le théorème précédent.

Application 38 : On suppose que $K = \mathbb{F}_q$, alors u est diagonalisable si, et seulement si, $u^q = f$.

Application 39 : Soit $A \in M_n(K)$, $A \neq 0$, alors $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

2.3 Décomposition de Dunford

Théorème 40 (Décomposition de Dunford). *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes tels que*

1. $u = d + n$.
2. *d est diagonalisable.*
3. *n est nilpotent.*
4. $d \circ n = n \circ d$.

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Méthode 41 : (Calcul effectif) Soit $A \in M_n(K)$.

- Calculer $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$, on note $Q_i = \prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{m_j} = \dfrac{\chi_A(X)}{(X-\lambda_i)^{m_i}}$.
- Écrire une relation de Bézout entre les Q_i. (On pourra décomposer $\dfrac{1}{\chi_A}$ en éléments simples) : $\sum_{i=1}^{r} U_iQ_i = 1$.
- Les projecteurs spectraux sont $\pi_i = (U_iQ_i)(u)$ et alors $d = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\pi_i$ est la partie diagonalisable et $n = u - d$ la partie nilpotente.

Application 42 : Calcul des puissances ou des exponentielles d'endomorphismes.

Proposition 43. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A est diagonalisable si, et seulement si, $\exp(A)$ est diagonalisable.*

Application 44 : On a $\exp(A) = I_n$ si, et seulement si, A est diagonalisable et de spectre dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

3 Applications

3.1 Endomorphismes auto-adjoints

On suppose ici que E est un espace euclidien.

Définition 45. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est auto-adjoint si $\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.*

Lemme 46. *Soit F un sous-espace stable par u auto-adjoint, alors $F^\perp$ est stable par u.*

Théorème 47. *On suppose que u est auto-adjoint, alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f.*

Corollaire 48. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que P^TAP est diagonale.*

Corollaire 49 (Pseudo-réduction simultanée). *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$A = P^TP \qquad \text{et} \qquad B = P^TDP$$

avec D diagonale.

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 50.
1. *$S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.*
2. *L'application $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \longmapsto M^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*

3.2 Réduction simultanée

Lemme 51. *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors,*

1. *Tout sous-espace propre de u est stable par v.*
2. *$\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.*

Théorème 52 (Diagonalisation simultanée). *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables et qui commutent, il existe une base de diagonalisation commune à f et g.*

Remarque 53 : La réciproque est bien entendue vraie.

Proposition 54. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Alors, les $(u_i)_{i\in I}$ sont codiagonalisables.*

DEVELOPPEMENT 2

Proposition 55. *Soit $x \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{ad}(x) : y \in M_n(\mathbb{C}) \longmapsto xy - yx$. On a équivalence entre :*

1. *x est diagonalisable (resp. nilpotent).*
2. *$\mathrm{ad}(x)$ est diagonalisable (resp. nilpotent).*

Théorème 56. *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$ telle que le seul nilpotent est 0, alors $\mathcal{A}$ est codiagonalisable.*

3.3 Résolution de problèmes linéaires

Méthode 57 : (Suites récurrentes linéaires) Écrire le système sous la forme $X_{n+1} = AX_n$. La réduction de la matrice A permet de calculer facilement $X_n = A^nX_0$, ou son comportement asymptotique.

Proposition 58. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors $A^n \longrightarrow 0$ si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), |\lambda| < 1$.*

Théorème 59. *Soit (u_n) une suite qui vérifie une suite récurrente linéaire homogène d'ordre p : $u_n = a_1u_{n-1} + \ldots + a_pu_{n-p}$. On note $r_1, \ldots, r_q$ les racines de $X^p - a_1X^{p-1} - \ldots - a_p$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ leur multiplicité.*
Il existe alors des polynômes P_i tels que $\deg(P_i) < \alpha_i$ tels que

$$u_n = P_1(n)r_1^n + \ldots + P_q(n)r_q^n$$

Exemple 60 : Si $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$.
- Si r_1 et r_2 sont les racines de $X^2 - aX - b$, alors $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Si r est l'unique racine double de $X^2 - aX - b$, alors, $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$.

Méthode 61 : (Équations différentielles linéaires) Écrire l'équation différentielle sous la forme $Y' = AY$. La réduction de A (ou sa décomposition de Dunford) permet le calcul de $Y(t) = e^{tA} Y_0$, ou son comportement asymptotique.

Proposition 62. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, alors $\lim_{t \to +\infty} e^{tM} = 0$ si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), \mathrm{Re}(\lambda) < 0$.*

Théorème 63. *On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre p : $y^{(p)} + a_{p-1} y^{(p-1)} + ... + a_p y = 0$. On note $r_1, ..., r_q$ les racines de $X^p + a_{p-1} X^{p-1} + ... + a_p$ et $\alpha_1, ..., \alpha_q$ leur multiplicité.*
Il existe alors des polynômes P_i tels que $\deg(P_i) < \alpha_i$ tels que

$$y(t) = \sum_{i=1}^{q} e^{r_i t} P_i(t)$$

Exemple 64 : Si $y'' + ay' + by = 0$,
- Si r_1 et r_2 sont les racines de $X^2 + aX + b$, alors $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.
- Si r est l'unique racine double de $X^2 + aX + b$, alors $y(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$.

3.4 Éléments de topologie

Proposition 65. *L'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Dans $M_n(\mathbb{R})$, l'adhérence est l'ensemble des matrices trigonalisables.*

Définition 66. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, $\{P \in K[X], P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $K[X]$ engendré par un unique polynôme unitaire, noté $\mu_{u,x}$.*

Théorème 67 (Admis)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $x \in E$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$.*

Définition 68. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique si, et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $\big(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.*

Proposition 69. *u est cyclique si, et seulement si, $\mu_u = \chi_u$.*

Théorème 70. *L'ensemble des endomorphismes cycliques de $\mathbb{C}^n$ est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. De plus, l'intérieur des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices cycliques.*

Proposition 71. *L'ensemble des matrices cycliques est un ouvert connexe de $M_n(\mathbb{C})$.*

Proposition 72. *L'application $M \in M_n(\mathbb{C}) \longmapsto \mu_m \in \mathbb{C}_n[X]$ n'est pas continue. L'ensemble des points de continuité de cette application est exactement l'ensemble des matrices cycliques de $M_n(\mathbb{C})$.*

Proposition 73. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A est diagonalisable si, et seulement si, $\big\{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbb{C})\big\}$ est fermé.*

Références :

- Cognet, Algèbre linéaire.
- Gourdon, Algèbre.
- Gourdon, Analyse.
- Grifone, Algèbre linéaire.
- Mneimé, Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.