154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Pandou

29 mai 2022

On fixe E un K-espace vectoriel de dimension n.

1 Sous-espaces stables et réduction

1.1 Sous-espaces stables

Définition 1. *Soit F un sous-espace de E, on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. On peut alors définir une application linéaire induite sur F : $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.*

Exemple 2 : Tous les espaces propres de u sont des sous-espaces stables propres par u. De même, pour $\mathrm{Im}(u)$.

Proposition 3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u. Alors, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire par blocs :*

$$\mathrm{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

où $A = \mathrm{Mat}(u_{|F})$ et $C = \mathrm{Mat}(\overline{u})$ où $\overline{u} \in \mathcal{L}(E/F)$.

Corollaire 4. *En gardant les notations précédentes, on a*

$$\chi_u = \chi_{u_{|F}} \times \chi_{\overline{u}}$$

Remarque 5 : Si $B = 0$, alors on a une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces stables par u.

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 6 (Décomposition de Fitting)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe un unique couple (F, G) de sous-espaces stables par u tels que :*

1. *$E = F \oplus F$.*
2. *$u_{|F}$ est inversible.*
3. *$u_{|G}$ est nilpotent.*

Application 7 : Dans $M_n(\mathbb{F}_q)$, il y a $q^{n(n-1)}$ matrices nilpotentes.

Application 8 : u est nilpotent si, et seulement si, $u_{|F}$ et $\overline{u}$ sont nilpotents.

Proposition 9. *Soit F un sous-espace stable par u, alors $\mu_{u_{|F}}$ divise μ_u. De plus, si $E = F \oplus G$ est une décomposition de E en somme de sous-espaces stables, alors $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_{u_{|F}}, \mu_{u_{|G}})$.*

Proposition 10. *Soit F un sous-espace stable par u, alors $F^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$ est stable par ${}^t u$.*

Application 11 : Si E est un espace euclidien et F stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Lemme 12. *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors, tout espace propre de u est stable par v et $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.*

1.2 Trigonalisabilité

Définition 13. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.*

Théorème 14. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé sur K.*

Application 15 : u est trigonalisable si, et seulement si, $u_{|F}$ et $\overline{u}$ sont trigonalisables.

Corollaire 16. *Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.*

Application 17 : Dans $M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices diagonalisables (à valeurs propres distinctes) est dense.

Proposition 18. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux. Alors, il existe une base commune de trigonalisation pour les u_i.*

1.3 Diagonalisabilité

Définition 19. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Proposition 20. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u. Alors,*

$$\dim\big(E_u(\lambda)\big) \leqslant m_\lambda$$

Corollaire 21. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.*

Remarque 22 : La réciproque est bien sûr fausse : $u = \mathrm{Id}$.

Proposition 23. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

1. *u est diagonalisable.*
2. *χ_u est scindé sur K et on a $\dim\big(E_u(\lambda)\big) = m_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.*
3. *$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_u(\lambda)$.*

Application 24 : Soit $u \in GL(E)$, on suppose que u^2 est diagonalisable, alors u est diagonalisable.

Lemme 25 (des noyaux)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = Q_1 ... Q_r \in K[X]$ où les Q_i sont deux à deux premiers entre eux, alors*

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(Q_i(u)\big)$$

Théorème 26. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

1. *u est diagonalisable.*
2. *μ_u est scindé à racines simples.*
3. *u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.*

Corollaire 27. *Soit F un sous-espace stable par u. Si u est diagonalisable, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.*

Proposition 28. *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Alors, il existe une base commune de diagonalisation pour les u_i.*

1.4 Décomposition de Dunford

Théorème 29 (Cayley-Hamilton)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\chi_u(u) = 0$.*

Définition 30. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_u scindé, on note $E'_u(\lambda) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}\big((u - \lambda \mathrm{Id})^k\big)$ le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ.*

Proposition 31. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose que χ_u est scindé. Alors,*

1. *$E'_u(\lambda)$ est stable par u.*
2. *$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E'_u(\lambda)$.*
3. *$\dim\big(E'_u(\lambda)\big) = m_\lambda$.*

Théorème 32 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que*

1. *$u = d + n$.*
2. *d diagonalisable.*
3. *n nilpotent.*
4. *$d \circ n = n \circ d$.*

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Exemple 33 : (Calcul explicite) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Écrire $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$. Noter $Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}$.
2. Écrire une relation de Bézout entre les Q_i : $\sum_{i=1}^{r} U_i Q_i = 1$. On pourra par exemple décomposer en éléments simples $\frac{1}{\chi_u}$.
3. Les projecteurs spectraux sont donnés par $\pi_i = (U_i Q_i)(u)$ et alors $d = \sum_i \lambda_i \pi_i$ et $n = u - n$.

Application 34 : Ceci permet de calculer l'exponentielle connaissant les projecteurs spectraux.

Application 35 : A est diagonalisable si, et seulement si, e^A est diagonalisable.

2 Représentations des groupes finis

On fixe G un groupe fini d'ordre n.

2.1 Définitions et généralités

Définition 36. *Une représentation de G est un couple (V, ρ) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. La dimension de V est appelée le degré de la représentation.*

Définition 37. *On dit que deux représentations (V, ρ) et (V', ρ') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $u : V \longrightarrow V'$ tel que*

$$\forall g \in G, u \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ u$$

Un endomorphisme $u : V \longrightarrow V'$ qui vérifie la relation précédente est dite G-équivariante et on note $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ l'ensemble de ces endomorphismes.

Exemples 38 :

- Représentation triviale : si $\rho(g) = \mathrm{Id}$, on parle de représentation triviale.
- Représentation régulière : soit $(e_g)_{g\in G}$ une base d'un espace V, on définit $\rho(h) \cdot e_g = e_{hg}$.
- Représentation par permutations : Si G agit sur un ensemble fini X, soit $(e_x)_{x\in X}$ une base d'un espace V, on définit $\rho_X(g) \cdot e_x = e_{g\cdot x}$.
- Représentation somme : si (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations, on a une représentation sur $V_1 \oplus V_2$ via
$$\rho(g)(v_1, v_2) = \rho(g)(v_1) + \rho(g)(v_2)$$
- Représentation duale : si (V, ρ) est une représentation, on a une représentation sur V^* via
$$\forall \mu \in V^*, \rho^*(g)(\mu) \cdot x = \mu\big(\rho(g)^{-1}x\big)$$
- Représentation sur $\mathrm{Hom}(V, V')$: si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations, on a une représentation sur $\mathrm{Hom}(V, V')$ via :
$$\forall f \in \mathrm{Hom}(V, V'), \rho_{\mathrm{Hom}(V,V')}(g)(f) \cdot x = \rho'(g) \cdot f\big(\rho(g)^{-1}(x)\big)$$

Définition 39. *Soit (V, ρ) une représentation de G et W un sous-espace de V. On dit que W est une sous-représentation de V si W est stable par tous les $\rho(g)$.*

Exemple 40 : Soit V la représentation régulière de G et $x = \sum_{g\in G} e_g$, alors $\mathrm{Vect}(x)$ est une sous-représentation de V.

Théorème 41. *Soit (V, ρ) une représentation de G et W un sous-espace stable par G, alors il existe un supplémentaire de W dans V stable par G.*

Définition 42. *Soit (V, ρ) une représentation de G, on dit qu'elle est irréductible si elle n'admet aucune sous-représentation autre que $\{0\}$ et V.*

Théorème 43 (Maschke)**.** *Toute représentation est somme de représentations irréductibles.*

Exemple 44 : Soit V la représentation par permutations de $\mathfrak{S}_n$. Soit $H_n = \left\{\sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0\right\}$, H_n est irréductible.

Proposition 45. *G est abélien si, et seulement si, toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1.*

Théorème 46 (Lemme de Schur)**.** *Soit V, W deux représentations irréductibles de G, alors*

1. *Si V et W sont non isomorphes, alors $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$.*
2. *Si V et W sont isomorphes, alors $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 1$.*

Corollaire 47. *Soit $h \in \mathcal{L}(V, V')$, on note $\overline{h} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)^{-1}h\rho(g)$. Alors,*

1. *Si V et V' ne sont pas isomorphes, alors $\overline{h} = 0$.*
2. *Si $V = V'$ et $\rho = \rho'$, alors $\overline{h}$ est une homothétie de rapport $\frac{1}{\dim(V)}\mathrm{Tr}(h)$.*

2.2 Caractères

Définition 48. *Soit (V, ρ) une représentation de G. On définit son caractère par : $\chi_V : g \in G \longmapsto \mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big) \in \mathbb{C}$.*

Proposition 49. *Soit χ_V le caractère d'une représentation (V, ρ). On a :*

1. *$\chi_V(1) = \dim(V)$.*
2. *$\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.*
3. *$\chi_V(ghg^{-1}) = \chi_V(h)$.*

Proposition 50. *Soit V et V' deux représentations de G, alors*

1. *$\chi_{V\oplus V'} = \chi_V + \chi_{V'}$.*
2. *$\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.*
3. *$\chi_{\mathrm{Hom}(V,V')} = \overline{\chi_V}\chi_{V'}$.*

Théorème 51. *Si $\varphi, \psi : G \longrightarrow \mathbb{C}$, on note $\langle \varphi, \psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}$.*

1. *Si χ est le caractère d'une représentation irréductible, alors $\langle \chi, \chi\rangle = 1$.*
2. *Si χ et χ' sont les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes, alors $\langle \chi, \chi'\rangle = 0$.*

Théorème 52. *Soit V une représentation de G de caractère φ que l'on décompose en somme d'irréductibles $V = W_1 \oplus ... \oplus W_r$. Soit W une représentation irréductible de caractère χ, alors le nombre de W_i tels que $W = W_i$ vaut $\langle \varphi, \chi$.*

Corollaire 53. *Deux représentations de même caractère sont isomorphes.*

Théorème 54. *Soit V une représentation de G de caractère χ, alors $\langle \chi, \chi\rangle = 1$ si, et seulement si, V est irréductible.*

3 Représentations des algèbres de Lie

3.1 Définitions et généralités

Définition 55. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un crochet bilinéaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tel que*

1. $\forall x \in \mathfrak{g}, [x,x] = 0$.
2. $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}, \big[x,[y,z]\big] + \big[y,[z,x]\big] + \big[z,[x,y]\big] = 0$.

Si $x \in \mathfrak{g}$, on note $\mathrm{ad}(x) \cdot y = [x,y]$.

Exemples 56 :
- $M_n(\mathbb{C})$ muni du crochet $[A,B] = AB - BA$ est une algèbre de Lie notée $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.
- Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}(V)$ est naturellement une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{gl}(V)$.
- $\{x \in \mathfrak{gl}(V), \mathrm{Tr}(x) = 0\}$ est une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{sl}(V)$.

Définition 57. *Un morphisme d'algèbres de Lie $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ est une application linéaire qui vérifie de plus*

$$\forall x,y \in \mathfrak{g}, u\big([x,y]\big) = \big[u(x), u(y)\big]$$

On dit que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ qui vérifie la relation précédente.
Une représentation de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un couple (V,ϕ) où V est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie et $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Proposition 58. $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *est un morphisme d'algèbres de Lie.*

Définition 59. *Un sous-espace vectoriel I de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ si pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(x)$ stabilise I.*
On dit que $\mathfrak{g}$ est simple s'il n'admet aucun idéal propre.

Exemple 60 : $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est simple.

Définition 61. *Soit I un idéal de $\mathfrak{g}$, alors l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/I$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie telle que $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/I$ est un morphisme d'algèbres de Lie.*

Proposition 62. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.*

1. *Tout noyau de morphisme d'algèbres de Lie partant de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.*
2. *Si $I \subset J$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$, alors J/I est un idéal de $\mathfrak{g}/I$ et on a un isomorphisme naturel*
$$(\mathfrak{g}/I)/(J/I) \simeq \mathfrak{g}/J$$
3. *Si I et J sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$, alors on a un isomorphisme naturel*
$$(I+J)/J \simeq I/(I \cap J)$$

Proposition 63. *Toute algèbre de Lie simple se plonge naturellement dans un $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.*

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 64. *Soit $x \in \mathfrak{gl}(V)$. On a équivalence entre :*
1. $\mathrm{ad}(x)$ *est diagonalisable (resp. nilpotent).*
2. *x est diagonalisable (resp. nilpotent).*

Théorème 65 (Engel)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$, où V est un espace de dimension finie, ne contenant que des éléments nilpotents, alors $\mathfrak{g}$ est cotrigonalisable.*

Définition 66. *On dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotent si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\forall x_1, ..., x_n \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{g}, \mathrm{ad}(x_1) \circ ... \circ \mathrm{ad}(x_n) \cdot y = 0$$

Autrement dit, si la suite définie par $\mathfrak{g}^{(n+1)} = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{g}^{(n)}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Proposition 67. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.*
1. *Si $\mathfrak{g}$ est nilpotent, alors toutes les images et toutes les sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ sont nilpotents.*
2. *Si $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ est nilpotent, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotent.*
3. *Si $\mathfrak{g}$ est nilpotent, alors $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.*

Théorème 68 (Engel v.2)**.** *$\mathfrak{g}$ est nilpotent si, et seulement si, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent.*

3.2 Étude de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Proposition 69. *Soit $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. De plus, on a*

$$[h,x] = 2x, \qquad [h,y] = -2y \qquad \text{et} \qquad [x,y] = h$$

Lemme 70. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $V_\lambda = \{v \in V, [h,v] = \lambda v\}$ et $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Soit $x \in V_\lambda$, alors*

$$\phi(x) \cdot v \in V_{\lambda+2} \qquad \text{et} \qquad \phi(y) \cdot v \in V_{\lambda-2}$$

Proposition 71. *Soit (ϕ, V) une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $V_\lambda \neq 0$ et $V_{\lambda+2} = 0$. On prend $v_0 \in V_\lambda$ et on pose $v_i = \frac{1}{i!}\phi(y^i) \cdot v_0$. Alors, on a*

$$\phi(h) \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i, \qquad \phi(y) \cdot v_i = (i+1)v_{i+1} \qquad \text{et} \qquad \phi(x) \cdot v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$$

Théorème 72. *Soit V une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimension $n+1$, alors*

$$V = \bigoplus_{k=0}^{n} V_{n-2k}$$

et $\dim(V_{n-2k}) = 1$.
De plus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, *il existe, à isomorphisme près, une unique représentation irréductible de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *de dimension* $n+1$.

Références :

- Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.
- Gourdon, Algèbre.
- Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.
- Serre, Représentations linéaires des groupes finis.