152 : Déterminant. Exemples et applications.

Pandou

26 avril 2022

1 Formes multilinéaires alternées

E est un K-espace vectoriel de dimension n.

1.1 Formes multilinéaires

Définition 1. *On dit que $f : E^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application p-linéaire si chaque application $f_i : x \in E \longrightarrow f(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_p) \in \mathbb{R}$ est linéaire. On note $\mathcal{L}_p(E)$ l'espace des formes p-linéaires.*

Exemple 2 :
- Si E est euclidien, alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.
- Si $\varphi_1, ..., \varphi_p \in E^*$, alors $x \in E^p \longmapsto \varphi_1(x_1)...\varphi_p(x_p)$ est p-linéaire.

Définition 3. *Soit $f \in \mathcal{L}_p(E)$. On dit que*
1. *f est alternée si $f(x_1, ..., x_p) = 0$ dès que deux des x_i sont égaux.*
2. *f est antisymétrique si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $f\big(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\big) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, ..., x_p)$.*

Remarque 4 : On définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{L}_p(E)$ via :

$$\sigma \cdot f(x_1, ..., x_p) = f\big(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\big)$$

Et donc, puisque les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, f est antisymétrique si, et seulement si,

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_p)$$

Proposition 5. *Toute forme alternée est antisymétrique. La réciproque est vraie si K est de caractéristique $\neq 2$.*

Exemple 6 : La multiplication sur $\mathbb{F}_2$ est antisymétrique (car $1 = -1$), mais n'est pas alternée.

Théorème 7. *L'espace des formes n-linéaires alternées est de dimension 1.*

Remarque 8 : Si f est une forme p-linéaire, on définit son antisymétrisé par $\widetilde{f} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sigma \cdot f$.
Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(e_1^*, ..., e_n^*)$ est la base duale de B dans E^*, on note Δ_B l'antisymétrisé de la forme n-linéaire : $(x_1, ..., x_n) \longmapsto e_1^*(x_1)...e_n^*(x_n)$.

1.2 Déterminant d'une famille

Définition 9. *Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors, il existe une unique forme n-linéaire alternée telle que $\Delta_B(e_1, ..., e_n) = 1$, on la note $\det_B$. Dans ce cas,*

$$\det_B(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} ... x_{n,\sigma(n)}$$

Proposition 10. *Soit B et B' deux bases de E, alors on a $\det_{B'}(x_1, ..., x_n) = \det_{B'}(B) \det_B(x_1, ..., x_n)$.*
En particulier, on a $\det_{B'}(B) \det_B(B') = 1$.

Théorème 11. *Soit $x_1, ..., x_n \in E$, alors on a équivalence entre :*
1. *$(x_1, ..., x_n)$ est liée.*
2. *Pour toute base B de E, $\det_B(x_1, ..., x_n) = 0$.*
3. *Il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1, ..., x_n) = 0$.*

1.3 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 12. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors, on définit*

$$\det(u) = \det_B \big(u(e_1), ..., u(e_n)\big)$$

qui ne dépend pas du choix de la base B.

Proposition 13. *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors,*
1. *$\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.*
2. *$\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.*
3. *Si $\lambda \in K$, alors $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.*
4. *$\det({}^t u) = \det(u)$.*
5. *$\det(u) \neq 0 \Longleftrightarrow u \in GL(E)$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$.*

Remarque 14 : En particulier, $\det : \mathcal{L}(E) \longrightarrow K$ est surjectif.

Définition 15. *Le groupe spécial linéaire de E est le sous-groupe de $GL(E)$ défini par*

$$SL(E) = \{u \in GL(E), \det(u) = 1\} = \mathrm{Ker}(\det)$$

Il est distingué dans $GL(E)$.

Remarque 16 : Comme $\det : GL(E) \longrightarrow K^*$ est surjectif, on a $GL(E)/SL(E) \simeq K^*$.

1.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 17. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(K)$. Le déterminant de A est le déterminant des colonnes de A dans la base canonique de K^n. On a*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

Exemple 18 : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

Proposition 19. *Soit $A, B \in M_n(K)$. Alors,*

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(I_n) = 1$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. $\det(A^T) = \det(A)$.
5. $\det(A) \neq 0 \iff A \in GL_n(K)$ *et dans ce cas,* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

En particulier, deux matrices semblables ont même déterminant. De plus, si A est la matrice d'un endomorphisme u, alors $\det(u) = \det(A)$.

Remarque 20 : De même, on définit $SL_n(K) = \{A \in GL_n(K), \det(A) = 1\}$ qui est un sous-groupe distingué de $GL_n(K)$ et on a l'isomorphisme $GL_n(K)/SL_n(K) \simeq K^*$.

2 Techniques de calcul

2.1 Opérations élémentaires

Proposition 21. *Si A est une matrice triangulaire, de diagonale $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors* $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Plus généralement, si A est triangulaire par blocs, ie $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ avec X et Z carrées, alors $\det(A) = \det(X)\det(Z)$.

Théorème 22. *Soit $A \in M_n(K)$, on appelle rangée une colonne ou une ligne de A. Alors,*

1. *L'échange de deux rangées de A change le signe de* $\det(A)$.
2. *La dilatation d'une rangée de A multiplie* $\det(A)$ *par λ.*
3. *L'action d'une transvection (à droite ou à gauche) sur A ne change pas son déterminant.*

Remarque 23 : Le pivot de Gauss permet donc de calculer le déterminant de $A \in M_n(K)$ en $O(n^3)$ opérations élémentaires.

2.2 Mineurs et cofacteurs

Définition 24. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(K)$. On définit le mineur (i,j) de A comme étant la matrice $M_{i,j} = (a_{k,\ell})_{k \neq i, \ell \neq j} \in M_{n-1}(K)$. Le cofacteur (i,j) de A est $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$.*
La matrice des cofacteurs de A est appelée la comatrice $\mathrm{Com}(A)$ de A.

Théorème 25 (Développement selon une rangée)**.** *Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(K)$.*

1. *Le développement par rapport à la j-ième colonne s'écrit* $\det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.
2. *Le développement par rapport à la i-ème ligne s'écrit* $\det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.

Remarque 26 : Cette méthode est très mauvaise pour le calcul du déterminant (comparée au pivot de Gauss) puisqu'elle s'exécute en $O(n!)$ opérations.
Cependant, pour une matrice creuse, cette méthode simplifie grandement les calculs.

Corollaire 27. *Si $A \in M_n(K)$, alors $A\mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$.*

Exemple 28 : Lorsqu'elle existe, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.3 Exemples de déterminants

Proposition 29 (Déterminant de Vandermonde)**.** *Soit $x_1, ..., x_n \in K$, alors*

$$V(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

Application 30 : Si K est de caractéristique nulle, alors M est nilpotente si, et seulement si, $\forall k, \mathrm{Tr}(M^k) = 0$.

Proposition 31 (Déterminant de Cauchy)**.** *Soit $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in K$ tels que $\forall i, j, a_i + b_j \neq 0$. Alors,*

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right) = \frac{\prod_{i<j} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$$

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 32 (Déterminant de Hankel)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. On définit $H_n = \det\left(a_{i+j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors, on a équivalence entre :*

1. *La suite (a_n) vérifie une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients dans K.*
2. *$H_n = 0$ à partir d'un certain rang.*

Application 33 : La série formelle $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ est une fraction rationnelle si, et seulement si, $H_n = 0$ à partir d'un certain rang.

3 Applications

3.1 Déterminant sur un anneau

Dans cette section, R désigne un anneau commutatif unitaire.

Définition 34. *Soit $A \in M_n(R)$, on définit son déterminant par* $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$.

Proposition 35 (Propriétés conservées)**.** *Soit $A, B \in M_n(R)$.*

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(A^T) = \det(A)$.
3. $\mathrm{Com}(A)^T A = A\mathrm{Com}(A)^T = \det(A) I_n$.

Remarque 36 : Ici, remplacer les variables par des indéterminées permet d'étudier le déterminant sur le corps $\mathbb{Q}(X_{i,j}, Y_{i,j})$.

Corollaire 37. *A est inversible dans $M_n(R)$ si, et seulement si,* $\det(M) \in R^\times$.

Définition 38. *Soit $A \in M_n(K)$. Le polynôme caractéristique de A est le déterminant dans $M_n\big(K[X]\big)$: $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.*

Proposition 39 (Matrice compagnon)**.** *Soit $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0 \in K[X]$. La matrice compagnon de P est la matrice* $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}$, *alors $\chi_{C_P} = \mu_{C_P} = P$, où μ_{C_P} désigne le polynôme minimal de C_P.*

Théorème 40 (Cayley-Hamilton)**.** *Si $A \in M_n(K)$, alors $\chi_A(A) = 0$*

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 41.

$$\chi_A'(X) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Com}(XI_n - A)\big)$$

Théorème 42. *Soit $A \in M_n(K)$, on pose $B_0 = I_n$ et $B_k = AB_{k-1} - \dfrac{\mathrm{Tr}(AB_{k-1})}{k} I_n$. Alors,*

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(AB_0)X^{n-1} - \frac{\mathrm{Tr}(AB_1)}{2}X^{n-2} - \dots - \frac{\mathrm{Tr}(AB_{n-1})}{n}$$

3.2 Algèbre (bi)linéaire

Proposition 43 (Formule de Cramer)**.** *Soit $A = (C_1|\dots|C_n) \in GL_n(K)$, $B \in K^n$, alors les solutions de $AX = B$ sont données par*

$$x_i = \frac{\det(C_1|\dots|C_{i-1}|B|C_{i+1}|\dots|C_n)}{\det(A)}$$

Théorème 44. *Soit $A \in M_n(K)$. Le rang de A est la taille de la plus grande sous-matrice de A inversible.*

Corollaire 45 (Semi-continuité inférieure)**.** *Soit (A_n) une suite de matrices qui converge vers une matrice A, alors*

$$\mathrm{rg}(A_n) \geqslant \mathrm{rg}(A)$$

Corollaire 46. *Soit $A \in M_n(K)$ et L/K une extension de corps. Alors,*

$$\mathrm{rg}_L(A) = \mathrm{rg}_K(A)$$

Définition 47. *Soit q une forme quadratique sur E. Le discriminant de q est le déterminant d'une matrice de q modulo les carrés de K :*

$$\mathrm{disc}(q) = \det(Q) \in K/K^{(2)} \qquad \text{où} \qquad Q = \mathrm{Mat}_B(q)$$

Proposition 48. *Si deux formes quadratiques sont congruentes, alors elles ont même discriminant.*

Proposition 49. *Une forme quadratique est non dégénérée si, et seulement si, son discriminant est non nul.*

Théorème 50 (*Classification sur $\mathbb{F}_q$)**.** *Soit $p \geqslant 3$ premier et $n \geqslant 1$, on note $q = p^n$. Soit δ un élément non carré de $\mathbb{F}_q$ et q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_q^n$, alors on a l'alternative*

- *q est congruente à $x_1^2+...+x_{n-1}^2+x_n^2$.*
- *q est congruente à $x_1^2+...+x_{n-1}^2+\delta x_n^2$.*

Proposition 51 (log-convexité du déterminant). *Soit $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha+\beta=1$ positifs, alors*

$$\det(\alpha A+\beta B) \leqslant \det(A)^{\alpha}\det(B)^{\beta}$$

3.3 Distances et mesure

Théorème 52. *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et X une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, alors $\lambda\big(u(X)\big) = \big|\det(u)\big|\lambda(X)$.*

Application 53 : Soit $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$. On considère le parallélipipède engendré par $(v_1, ..., v_n)$ $\mathcal{P}(v_1, ..., v_n) = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n, \lambda_i \in [0,1]\}$. Alors,

$$\lambda\big(\mathcal{P}(v_1, ..., v_n)\big) = \big|\det(v_1|...|v_n)\big|$$

Corollaire 54 (Inégalité de Hadamard). *Soit $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$. Alors, $\big|\det(v_1, ..., v_n)\big| \leqslant \|v_1\|...\|v_n\|$.*

Définition 55. *Soit $v_1, ..., v_n \in E$ où E est préhilbertien réel. Le matrice de Gram est la matrice $\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_n) = \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.*
On note $G(v_1, ..., v_n) = \det\big(\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_n)\big)$ le déterminant de Gram associé.

Proposition 56. *Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base d'un espace préhilbertien réel $G(v_1, ..., v_n) = \lambda\big(\mathcal{P}(v_1, ..., v_n)\big)^2$.*

Corollaire 57. *Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension n dont une base est $(v_1, ..., v_n)$, alors*

$$d(x,F)^2 = \frac{G(v_1, ..., v_n, x)}{G(v_1, ..., v_n)}$$

Application 58 (Théorème de Müntz)* : Soit (α_n) une suite de réels strictement positifs et strictement croissante. Alors, $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans L^2 si, et seulement si, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Proposition 59. *Soit un ellipsoïde définie par une forme quadratique définie positive $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$: $\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \leqslant 1\}$. Alors,*

$$\lambda\big(\mathcal{E}_A\big) = \frac{V_0}{\sqrt{\det(A)}} \qquad \text{où} \qquad V_0 \text{ est le volume de la boule unité de } \mathbb{R}^n$$

Application 60 (Ellipsoïde de John-Loewner)* : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Application 61 : Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$. En considérant $K = \{g\cdot x, g \in G, \|x\| = 1\}$, il existe une forme quadratique q définie positive telle que $G \subset O(q)$.

3.4 Topologie et calcul différentiel

Proposition 62. *Ici, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\det : GL_n(K) \longrightarrow K^*$ est une application continue.*

Application 63* : $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$. Si $K = \mathbb{C}$, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et si $K = \mathbb{R}$, alors $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Théorème 64 (Changement de variables). *Soit f est intégrable sur $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ et $\Phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, alors $x \longmapsto f\big(\Phi(x)\big)\det\big(\mathrm{d}\Phi(x)\big)$ est intégrable et*

$$\int_{\Omega_2} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\Omega_1} f\big(\Phi(x)\big)\big|\det(\mathrm{d}\Phi(x))\big|\mathrm{d}x$$

Application 65 : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Théorème 66 (*). $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une application $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}\det(M)\cdot H = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Com}(M)^T H\big)$.*

Application 67 : (Wronskien, libre un jour, libre toujours) Soit $y_1, ..., y_n$ des solutions du système différentiel linéaire $y' = A(t)y$ où $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ est continue. On note $w(t) = \det\big(y_1(t), ..., y_n(t)\big)$ leur wronskien. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, w'(t) = \mathrm{Tr}\big(A(t)\big)w(t)$$

En particulier, on a équivalence entre :

1. $(y_1, ..., y_n)$ est un système fondamental de solutions.
2. $\exists t \in \mathbb{R}, \big(y_1(t), ..., y_n(t)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
3. $\forall t \in \mathbb{R}, \big(y_1(t), ..., y_n(t)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Application 68 : $SL_n(\mathbb{R})$ est une variété différentiable réelle de dimension $n-1$ et

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(X) = 0\}$$

Références :

- Arnaudiès, Fraysse. Tome 1 - Algèbre.
- Beck, Malick; Peyré, Objectif Agrégation.
- Cognet, Algèbre linéaire.
- FGN, Algèbre 2, Algèbre 3.
- Gourdon, Algèbre & Analyse.
- Rouvière, Petit guide du calcul différentiel.
- Tauvel, Algèbre pour l'Agrégation.

Promis, ça rentre si vous écrivez assez petit... Par contre, j'aurais bien aimé parler de résultant, mais là c'est trop forcé, ça rentrera jamais :) Comme application possible : les nombres algébriques forment un anneau.
Les quelques énoncés munis de $*$ peuvent constituer d'autres développements que je décide de ne pas présenter pour cette leçon : soit très classiques, soit déjà présentés cette année.