151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Pandou

13 mars 2022

1 Définitions

On fixe E un K-espace vectoriel.

1.1 Familles libres, génératrices et bases

Définition 1. *Une famille de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ est dite :*

- *génératrice si* $\mathrm{Vect}(e_i) = E$, *ie*

$$\forall x \in E, \exists J \subset I \text{ fini}, \exists (\lambda_j)_{j\in J} \in K^J, x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j$$

- *libre si pouir tout $J \subset I$ finie, l'égalité $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0$ implique que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$. Sinon, on dit que $(e_i)_{i\in I}$ est liée.*

On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une base si elle est à la fois libre et génératrice.

Proposition 2. *Si E est un sous-espace vectoriel de $K[X]$, alors,*

1. *Toute famille échelonnée en degré est libre.*
2. *Toute famille de polynômes de valuations deux à deux distinctes est libre.*

Proposition 3. *Si E est un espace préhilbertien, alors toute famille orthogonale est libre.*

Proposition 4. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.*

Autre exemple 5 : $(x \longmapsto e^{\lambda x})_{x\in\mathbb{R}}$ et $(x \longmapsto |x-\alpha|)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ sont des familles libres de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

1.2 Théorie de la dimension finie

Définition 6. *On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.*

Exemple 7 : $K[X]$ n'est pas de dimension finie.

Théorème 8. *Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ libre, alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.*

Corollaire 9. *Soit E de dimension finie, alors*

1. *De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*
2. *Toute famille libre se complète en une base.*
3. *E admet une base.*

Application 10 : Tout sous-espace de E admet un supplémentaire.

Lemme 11. *Si E admet une famille génératrice de cardinal n, alors toute famille de cardinal $\geqslant n+1$ est liée.*

Théorème 12. *Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension de E.*

Corollaire 13. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors,*

1. *Toute famille libre de cardinal n est une base de E.*
2. *Toute famille génératrice de cardinal n est une base de E.*

Corollaire 14. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant n$.*

Proposition 15. *Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n.*

Application 16 : Soit E de dimension finie, alors tout élément de $\mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur.

Application 17 : Soit E de dimension finie et F un sous-espace de E, alors $f \in \mathcal{L}(E) \longmapsto f_{|F} \in \mathcal{L}(F, E)$ est surjective.

Application 18 : Le cardinal d'un corps fini de caractéristique p est une puissance de p.

Application 19 : Le cardinal d'un groupe fini dont tous les éléments sont d'ordre au plus 2 est une puissance de 2.

Théorème 20. *Soit F_1, F_2 deux sous-espaces de E, alors*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$$

Corollaire 21. *Soit F_1, F_2 deux sous-espaces de E, alors*

$$E = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0\}$$

Remarque 22 : Attention aux généralisations abusives de ce dernier corollaire pour plus de deux sous-espaces.

Proposition 23. *Soit F un sous-espace de E, alors E/F est de dimension finie et $\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$.*

Corollaire 24. *E/F est isomorphe à tout supplémentaire de F dans E.*

2 Rang

Définition 25. *Le rang d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ est la dimension de l'espace engendré par les f_i :*

$$\mathrm{rg}(f_i, i \in I) = \dim\big(\mathrm{Vect}(f_i, i \in I)\big)$$

Définition 26. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors le rang de u est la dimension de l'image de u. Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée.*

Théorème 27 (du rang). *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où seul E est supposé de dimension finie, alors*

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) + \mathrm{rg}(u)$$

Corollaire 28. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors on a équivalence entre :*

1. *u est injective.*
2. *u est surjective.*
3. *u est bijective.*

Autrement dit, dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ l'inversibilité à gauche (ou à droite) équivaut à l'inversibilité.

Applications 29 :
- Toute K-algèbre de dimension finie est un corps si, et seulement si, elle est intègre.
- Toute sous-algèbre de $M_n(K)$ contient les inverses de ses éléments inversibles

Application 30 : E et E^{**} sont canoniquement isomorphes.

Théorème 31. *Soit $M \in M_{n,p}(K)$ une matrice de rang r, alors il existe $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_p(K)$ tels que $PMQ = J_r$.*

Proposition 32. *Soit $M \in M_{n,p}(K)$ et P inversible, alors*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(PM) = \mathrm{rg}(MP)$$

et,

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M^T)$$

Application 32 : Le calcul du rang de M peut se réaliser par pivot de Gauss.

Proposition 33. *Le rang d'une matrice M est la taille d'une sous-matrice carrée inversible maximale de M.*

Corollaire 34. *Le rang est invariant par extension de corps.*

Proposition 35. *L'adhérence des matrices de rang r est l'ensemble des matrices de rang $\leqslant r$.*

3 Applications

3.1 Topologie

Théorème 36. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, alors toutes les normes de E sont équivalentes.*

Corollaire 37. *E est un espace de Banach.*

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 38. *Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et V un sous-espace de E de dimension finie, alors il existe un segment $I \subset \mathbb{R}$ tel que $\|f\|_I = \sup_{t \in I} |f(t)|$ est une norme sur V.*

Théorème 39. *Soit $f \in E$, on note V_f le sous-espace de E engendré par les translatés de f, alors V_f est de dimension finie si, et seulement si, f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.*

Proposition 40. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, où F est de dimension quelconque, alors u est automatiquement continue.*

Proposition 41. *Une partie K de E est compacte si, et seulement si, elle est fermée bornée.*

Théorème 42 (Riesz)**.** *Un espace normé E est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité est relativement compacte.*

3.2 Extension de corps

Définition 43. *Soit K, L deux corps, on dit que L est une extension de K si K est un sous-corps de L. On note alors L/K.*
La dimension de L en tant que K-espace vectoriel est appelée degré de l'extension.

Théorème 44. *Soit $M/L/K$ une tour d'extension de corps. Alors, M/L et L/K sont finies si, et seulement si, M/K est finie et dans ce cas*

$$[M : L][L : K] = [M : K]$$

Définition 45. *Soit $\alpha \in L$, on dit que α est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$. Sinon, on dit que α est transcendant sur K.*

Proposition 46. *Si α est transcendant sur K, alors*

$$K(X) \simeq K(\alpha) \qquad \text{et} \qquad K[X] \simeq K[\alpha]$$

Proposition 47. *Soit $\alpha \in L$, alors on a équivalence entre :*

1. *α est algébrique sur K.*
2. *$K[\alpha] = K(\alpha)$.*
3. *$K[\alpha]$ est de dimension finie. Cette dimension est appelée degré de α.*

3.3 Vers les algèbres de Lie de dimension finie

Définition 48. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : V \times V \longrightarrow V$ antisymétrique telle que*

$$\forall x, y, z \in V, \big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$$

Définition 49. *Soit $x \in \mathfrak{g}$, on définit l'adjoint de x par $\mathrm{ad}(x) : y \in \mathfrak{g} \longmapsto [x, y] \in \mathfrak{g}$.*

Théorème 50. *On suppose que $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{C})$, alors on a équivalence entre :*

1. *$x \in \mathfrak{g}$ est diagonalisable (resp. nilpotent).*
2. *$\mathrm{ad}(x)$ est diagonalisable (resp. nilpotent). On dira que x est ad-diagonalisable (resp. ad-nilpotente).*

Proposition 51. *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$ tel que son seul élément nilpotent est 0, alors $\mathcal{A}$ est codiagonalisable.*

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 52 (Engel)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $GL(V)$, où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, constituée seulement de matrices nilpotentes, alors $\mathfrak{g}$ est cotrigonalisable.*

Références :

- Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.
- Cognet, Algèbre linéaire.
- Gourdon, Algèbre.
- Griffone, Algèbre linéaire.