

1 Action par translation

Lemme 1 (Factorisation). Soit E et F deux K -espaces vectoriels et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E , alors $u|_S$ est un isomorphisme.
2. $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v)$ si, et seulement si, il existe $w : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(v)$ linéaire telle que $v = w \circ u$.
3. Soit S_1 un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E et S_2 un supplémentaire de $\text{Ker}(v)$ dans E , alors on a $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(v)$ si, et seulement si, il existe $w : S_2 \rightarrow S_1$ linéaire tel que $v = u \circ w$.

1.1 Échelonnage et matrices élémentaires

Définition 2. On dit que $A \in M_{n,m}(K)$ est échelonnée en ligne s'il existe $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

1. Les r premières lignes de A sont non nulles. On note $d_i = \min \{j \in \llbracket 1, m \rrbracket, a_{i,j} \neq 0\}$.
2. Les $n - r$ dernières lignes de A sont nulles.
3. $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_r \leq m$.

On dit qu'elle est échelonnée en colonnes si $A^T \in M_{m,n}(K)$ est échelonnée en ligne.

Exemple 3 : Quand $r = n = m$, toute matrice échelonnée en ligne est triangulaire supérieure et inversible.

Proposition 4. On reprend les notations de la définition, alors A est de rang r .

Définition 5. Soit $\lambda \in K$, pour $i \neq j$, on note

1. $D_i(\lambda)$ la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
2. $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$.
3. $P_{i,j}$ la matrice $I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i})$.

Remarque 6 : On a les effets suivants :

1. La multiplication à gauche par $D_i(\lambda)$ fait l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
2. La multiplication à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$ fait l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
3. La multiplication à gauche par $P_{i,j}$ fait l'opération $L_i \leftarrow L_j$.

4. La multiplication à droite par $D_j(\lambda)$ fait l'opération $C_j \leftarrow \lambda C_j$.
5. La multiplication à droite par $T_{i,j}(\lambda)$ fait l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.
6. La multiplication à droite par $P_{i,j}$ fait l'opération $C_j \leftarrow C_i$.

1.2 Action par translection à gauche

Définition 7. On définit une action de $GL_n(K)$ sur $M_{n,m}(K)$ via $P \cdot A = PA$.

Théorème 8. Deux matrices sont dans la même orbite pour l'action de translation à gauche si, et seulement si, il ont même noyau.

Remarque 9 : L'action par multiplication à gauche par une matrice ne change pas les solutions d'un système linéaire.

Proposition 10. On suppose que $K = \mathbb{R}$ (resp. $K = \mathbb{C}$), alors dans l'orbite de $A \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{C})$), il y a une matrice symétrique définie positive (resp. hermitienne définie positive).

Théorème 11. Soit $A \in M_{n,m}(K)$, alors dans l'orbite de A , il y a une unique matrice échelonnée en lignes. Plus précisément, il existe $P \in GL_n(K)$ produit de matrices de permutation et de transvection tel que PA est échelonnée en lignes.

Remarque 12 : On peut résoudre un système linéaire par la méthode des "combinaisons linéaires". On a trois résultats possibles :

- Si $n = m = r$, alors on obtient un système de Cramer triangulaire
$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \dots + \alpha_{1,n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{2,2}x_2 + \dots + \alpha_{2,n}x_n &= \beta_2 \\ \vdots & \\ \alpha_{n,n}x_n &= \beta_n \end{cases} \quad \text{qui se résout en "remontant" :}$$

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{n,n}} \quad \text{et} \quad x_i = \frac{1}{\alpha_{i,i}} \left(\beta_i - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{i,j}x_j \right)$$

- Si $r \leq n$ et $r < m$, on a un "surplus" d'inconnues : la matrice est de rang r et l'ensemble des solutions est un espace affine de codimension r .

- Si $r = m$ et $m < n$, alors on a un “défaut” d’inconnues : la matrice est de rang maximal m et si le système admet une solution, on la calcule comme pour un système de Cramer.

1.3 Action par translation à droite

Définition 13. On définit une action de $GL_m(K)$ sur $M_{n,m}(K)$ via $P \cdot A = AP^{-1}$.

Remarque 14 : L’écriture AP^{-1} est imposée par le fait que l’on parle d’actions à gauche et qu’on doit avoir $(PQ) \cdot A = P \cdot (Q \cdot A)$.

Théorème 15. Deux matrices sont dans la même orbite pour l’action de translation à droite si, et seulement si, elles ont même image.

Remarque 16 : Pour résoudre un système linéaire, il **ne faut pas** agir sur les colonnes. Par contre, les colonnes de A et A' engendrent le même sous-espace si, et seulement si, elles sont dans la même orbite.

Théorème 17. Soit $A \in M_{n,m}(K)$, alors dans l’orbite de A , il y a une unique matrice échelonnée en colonnes. Plus précisément, il existe $P \in GL_n(K)$ produit de matrices de permutations et de transvection tel que AP est échelonnée en colonnes.

2 Action de $GL_n(K) \times GL_m(K)$ sur $M_{n,m}(K)$ par équivalence

Définition 18. On définit une action de $GL_n(K) \times GL_m(K)$ sur $M_{n,m}(K)$ par $(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$. Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes.

Théorème 19. Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang $r \in \llbracket 0, \min(n, m) \rrbracket$.

Corollaire 20. Soit $r \in \llbracket 0, \min(n, m) \rrbracket$, toute matrice de rang r est équivalente à la matrice $J_r = \text{diag}(I_r, 0_{n-r, m-r})$.

Application 21 : Tout hyperplan de $M_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

Application 22 : Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ non constante telle que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(A)f(B)$, alors on a

$$f(A) \neq 0 \iff A \in GL_n(\mathbb{R})$$

Proposition 23. $GL_r(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corollaire 24. L’ensemble des matrices de rang r de $M_{n,m}(\mathbb{C})$ est connexe et

$$\overline{\{M \in M_{n,m}(\mathbb{C}), \text{rg}(M) = r\}} = \{M \in M_{n,m}(\mathbb{C}), \text{rg}(M) \leq r\}$$

Application 25 : Si (A_k) converge vers B alors, $\text{rg}(A_k) \geq \text{rg}(B)$.

Proposition 26. Dans $M_{n,m}(\mathbb{F}_q)$, le nombre de matrices de rang r est

$$\frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{k=1}^r (q^k - 1)} \prod_{k=n-r+1}^n (q^k - 1) \prod_{k=m-r+1}^m (q^k - 1)$$

3 Matrices semblables

3.1 Généralités, polynômes d’endomorphismes

Définition 27. On définit une action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $M_n(\mathbb{C})$ via $P \cdot M = PMP^{-1}$. Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables.

Définition 28. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Les racines de χ_A sont appelées les valeurs propres de A , on note $\text{Sp}(A)$ l’ensemble des valeurs propres de A .

Définition 29. Le générateur unitaire de l’idéal annulateur de $A : \{P \in \mathbb{C}[X], P(A) = 0\}$ est noté μ_A , appelé polynôme minimal de A .

Théorème 30 (Lemme des noyaux). Soit $P = Q_1 \dots Q_r \in K[X]$ où les Q_i sont deux à deux premiers entre eux et $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors

$$\text{Ker}(P(A)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(Q_i(A))$$

Théorème 31 (Cayley-Hamilton (admis)).

$$\chi_A(A) = 0$$

3.2 Matrices diagonalisables

Définition 32. On dit que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l’ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.

Application 33 : La diagonalisation de matrices permet un calcul facile des puissances et ou encore de l’exponentielle de matrices.

Théorème 34. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors on a équivalence entre :

1. A est diagonalisable.
2. $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.
3. μ_A est scindé à racines simples.
4. Il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples.

Théorème 35. On a une bijection entre $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$.

Corollaire 36. Le polynôme caractéristique est un invariants totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.

Remarque 37 : Le polynôme minimal n'est pas un invariant total : $\text{diag}(1, 1, 2)$ et $\text{diag}(1, 2, 2)$ ont même polynôme minimal, mais pas le même polynôme caractéristique.

Proposition 38. *A est diagonalisable si, et seulement si, sa classe de similitude est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Proposition 39. *L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense. On peut même prendre l'ensemble des matrices diagonalisables à n valeurs propres distinctes.*

Corollaire 40. *L'application $A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \mu_A \in \mathbb{C}_n[X]$ n'est pas continue.*

3.3 Matrices nilpotentes

Définition 41. *On dit que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Le plus petit entier p est appelé ordre de nilpotence de A . De plus, on notera $K_i = \text{Ker}(A^i)$.*

Lemme 42. *La suite $(\dim(K_{i+1}/K_i))_i$ est décroissante.*

Théorème 43 (Existence de la réduite de Jordan). *Soit A une matrice nilpotente d'ordre*

$$m, \text{ alors } A \text{ est semblable à une matrice } \text{diag}(J_1, \dots, J_k) \text{ où } J_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

une telle matrice est appelée un bloc de Jordan.

Remarque 44 : On peut aller plus loin en montrant qu'une telle décomposition est nécessairement unique, ce qui fournit un invariant total pour l'action de similitude pour les matrices nilpotentes.

3.4 Réduction de Jordan

Théorème 45. *On écrit $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, alors A est semblable à une matrice de la forme $\text{diag}(J_1, \dots, J_p)$ où*

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} \lambda_k & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{\alpha_k}(\mathbb{C})$$

avec $\varepsilon_{k,i} \in \{0, 1\}$.

Remarque 46 : De même, on a même une forme d'unicité de la réduction de Jordan, mais nous n'en parlerons pas dans ce cours.

Le calcul des puissances des blocs de Jordan permet un calcul facile de l'exponentielle de matrices.

Application 47 : A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $k \geq 1$, $(A - \lambda I_n)^k$ et $(B - \lambda I_n)^k$ sont équivalentes.

Application 48 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A et A^T sont semblables.

4 Formes quadratiques et formes hermitiennes

4.1 Action de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ par congruence

Définition 49. *On définit une action de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ en posant $P \cdot A = PAP^T$. Deux matrices dans la même orbite sont dites congruentes.*

Remarque 50 : Deux matrices congruentes représentent la même forme quadratique.

Proposition 51. *Le rang et le déterminant modulo les carrés de K^* (appelé discriminant) sont des invariants pour cette action.*

Théorème 52 (Réduction de Gauss). *Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.*

Remarque 52 : Cette matrice diagonale n'est pas nécessairement unique (même à l'ordre près) : I_n et $2I_n$ sont congruentes dans $S_n(\mathbb{C})$.

Théorème 53 (Classification dans $\mathbb{C}$). *Soit $A, B \in S_n(\mathbb{C})$. A et B sont congruentes si, et seulement si, elles ont même rang.*

Théorème 54 (Classification dans $\mathbb{R}$). *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de rang r , alors il y a un unique couple d'entiers (p, q) tel que $p + q = r$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P^T A P$ est diagonale de la forme $\text{diag}(I_p, -I_q, 0)$ où $p + q = r$. Le couple (p, q) est appelé la signature de A .*

Proposition 55. *Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors p (resp. q) est la dimension du plus grand sous-espace F pour lequel la restriction de S à F est définie positive (resp. définie négative).*

Théorème 56 (Spectral réel). *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $PAP^{-1} = PAP^T$ est diagonale.*

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 57. Soit p un nombre premier impair et $q = p^n$, l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a toujours une solution dans $\mathbb{F}_q$.

Théorème 58 (Classification dans $\mathbb{F}_q$). Soit p un nombre premier impair et $q = p^n$, on fixe $\delta \in \mathbb{F}_q^*$ qui n'est pas un carré. Alors, toute matrice symétrique inversible de $S_n(\mathbb{F}_q)$ est congruente à l'une des deux matrices suivantes :

$$I_n \quad \text{ou} \quad \text{diag}(1, \dots, 1, \delta)$$

4.2 Action par congruence hermitienne

Définition 59. On définit une action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices hermitiennes via $A \cdot H = AH A^*$.

Remarque 60 : De la même façon que $S_n(K)$ décrit les formes quadratiques sur K , $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ décrit les formes hermitiennes sur $\mathbb{C}$: en effet si $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors $(X, Y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto X^T H \bar{Y}$ est une forme hermitienne.

On retrouve les mêmes résultats que pour les formes quadratiques en grande partie. Je n'en propose qu'une esquisse ici.

Théorème 61 (Réduction de Gauss). Pour tout $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $P^T H \bar{P}$ est diagonale réelle.

Le nombre de coefficients > 0 (resp. < 0) est noté p (resp. q), alors (p, q) ne dépend que de la classe de congruence hermitienne de H , appelé signature de H .

Théorème 62 (Spectral hermitien). Soit $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ tel que $U H U^*$ est diagonale réelle.

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 63. 1. Le noyau de l'action par congruence hermitienne est l'ensemble des homothéties.

2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}), MH + HM^* = 0$, alors $M = 0$.

Théorème 64. On admet que les groupes $SL_2(\mathbb{C})$ et $SO_0(3, 1)$ sont des variétés différentielles (réelles) de même dimension, on a alors un difféomorphisme :

$$PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_0(3, 1)$$

Références :

- Caldero, Germoni, H2G2.
- Rombaldi, Algèbre et géométrie. 2è édition.