149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approches d'éléments propres. Applications.

Pandou

13 mai 2022

On fixe un espace vectoriel E de dimension n.

1 Éléments propres et polynôme caractéristique

1.1 Éléments propres

Définition 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$. On dit que λ est une valeur propre de u de $u - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas injective. On note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.*

Remarque 2 :
- $u \in GL(E) \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.
- En identifiant une matrice avec l'endomorphisme associé dans une base, on peut définir toutes ces notions pour des matrices.
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre réelle.

Définition 3. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.*

1. *Un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ est appelé un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.*
2. *On note $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ l'espace propre associé à λ.*
3. *On note $E'_\lambda(u) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}\big((u - \lambda \mathrm{Id})^k\big)$ l'espace caractéristique associé à λ.*

Remarque 4 : $E_\lambda(u)$ et $E'_\lambda(u)$ sont des sous-espaces stables par u.

Théorème 5. *La somme $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ est toujours directe.*

Théorème 6 (Localisation de Gerschgörin)**.** *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$, on note $L_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Alors,*

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leqslant L_i\}$$

1.2 Polynôme caractéristique

Définition 7. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit son polynôme caractéristique comme $\chi_u(X) = \det(X\mathrm{Id} - u)$.*

Remarque 8 :
- Le polynôme caractéristique d'une matrice A est le polynôme caractéristique de n'importe quel endomorphisme u représenté par A dans n'importe quelle base. En particulier, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
- Les racines de χ_u sont exactement les valeurs propres de u.

Proposition 9. *Si u admet n valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ comptées avec multiplicité, on a*

$$\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Lemme 10. *Soit F un sous-espace stable par u, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.*

Théorème 11. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u, alors*

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})\big) \leqslant m_\lambda$$

Définition 12. *On dit que u est diagonalisable (resp. trigonalisable) s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale (resp. triangulaire).*

Théorème 13. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :*

1. *u est diagonalisable.*
2. *$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim\big(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})\big) = m_\lambda$.*
3. *$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.*

Théorème 14. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé.*

Corollaire 15. *Soit F un sous-espace stable par u. Si u est trigonalisable, alors $u_{|F}$ est trigonalisable.*

Définition 16. *Soit $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on définit sa matrice compagnon par*

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 17.

$$\chi_{C_P} = P$$

Théorème 18 (Cayley-Hamilton)**.**

$$\chi_u(u) = 0$$

Lemme 19 (des noyaux)**.** *Soit $P = Q_1 ... Q_r \in K[X]$ avec les Q_i deux à deux premiers entre eux, alors*

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(Q_i(u)\big)$$

Proposition 20.

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E'_\lambda(u)$$

1.3 Calcul de polynôme caractéristique

Remarque 21 : Le calcul d'un polynôme caractéristique par développement par rapport à une rangée se fait en $O(n!)$ opérations élémentaires en général. On réserve cette méthode pour les petites dimensions ($n \leqslant 3$) ou dans le cas où la matrice $XI_n - A$ est creuse (ie comporte beaucoup de 0).

Méthode 22 : (Krylov) On écrit $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\forall u \in K^n, \sum_{k=0}^{n} a_k A^k u$$

On en déduit que les (a_k) sont solutions des systèmes linéaires $\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = 0$ avec $u_k = A^k u$. Il faut pas de chance pour qu'un choix arbitraire de u ne fasse pas de ce système un système de Cramer, que l'on peut alors résoudre par exemple par le pivot de Gauss.

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 23 (Formules de Newton)**.** *Soit $x_1, ..., x_n \in K$ deux à deux distincts, on note $S_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$ et σ_p les polynômes symétriques élémentaires en les x_i. Alors, si $p \leqslant n-1$, on a*

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + ... + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}S_1 + (-1)^p p\sigma_p = 0$$

Théorème 24 (Algorithme de Faddeev)**.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $A_0 = A$ et $A_{k+1} = A\left(A_k - \frac{1}{k+1}\mathrm{Tr}(A_k)I_n\right)$, alors*

$$\chi_A(X) = X^n + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k}\mathrm{Tr}(A_{k-1})\right) X^{n-k}$$

Remarque 25 : Cette méthode calcule le polynôme caractéristique en $O(n^4)$ opérations. C'est une résolution plus lourde que le pivot de Gauss, mais qui ne nécessite pas le choix d'un pivot qui peut donner des instabilités numériques.

Remarque 26 : Le calcul du polynôme caractéristique sous forme développée ne nous permet pas nécessairement de calculer les valeurs propres facilement non plus... Il est réputé connu qu'on ne peut pas calculer les racines d'un polynôme général de degré $\geqslant 5$ par des extractions de racines (qui demandent déjà elle-même des calculs approchés).
On préfèrera des méthodes de recherches de zéros pour une fonction, type méthode de Newton ou même simplement dichotomie.

2 Méthodes de réduction effective

2.1 Diagonalisation, trigonalisation effective

Méthode 27 : (de diagonalisation) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- Calculer le polynôme caractéristique et en déduire les valeurs propres de A ainsi que leur mutliplicité algébrique.
- Calcul des espaces propres via la résolution du système $AX = \lambda X$. Observer la dimension des espaces propres, on suppose qu'on a égalité avec la multiplicité algébrique (sinon A n'est pas diagonalisable).
- On met dans les colonnes de P une base de vecteurs propres que l'on vient de calculer. Calculer P^{-1}.
- La matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Remarque 28 : Si χ_A est scindé à racines simples, on peut en déduire déjà immédiatement que A est diagonalisable. Il faut cependant poursuivre le calcul pour obtenir les vecteurs propres.

Méthode 29 : (de trigonalisation) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- Trouver un vecteur propre e_1 de A.
- Compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ (par exemple avec la base canonique). On note P la matrice $(e_1|\dots|e_n)$.
- La matrice $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ avec $A' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$.
- Par récurrence, on trigonalise A' on peut écrire $P'^{-1}A'P'$ sous forme triangulaire supérieure avec $P' \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$.
- Poser $Q = \left(e_1 \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ P' \end{pmatrix} \right) \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $Q^{-1}AQ$ est triangulaire supérieure.

2.2 Décomposition de Dunford

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 30. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que $u = d + n$ et*

1. *d est diagonalisable.*
2. *n est nilpotent.*
3. *$d \circ n = n \circ d$.*

Proposition 31. *La projection sur $E'_\lambda(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} E'_\mu(u)$ est un polynôme en u.*

Corollaire 32. *Dans la décomposition de Dunford, d et n sont des polynômes en u.*

Méthode 33 : (Calcul effectif de la décomposition de Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Calculer et scinder χ_u : $\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$.
- On note $Q_\lambda = \prod_{\mu \neq \lambda} (X - \mu)^{m_\mu}$, écrire une relation de Bézout entre les Q_λ (ceci peut être obtenu en décomposant en éléments simples $\frac{1}{\chi_u}$) : $\sum_\lambda U_i Q_i = 1$.
- Le projecteur spectral sur $E'_\lambda(u)$, noté π_λ est $(U_i Q_i)(u)$ et alors

$$d = \sum_\lambda \lambda \pi_\lambda \qquad \text{et} \qquad n = f - d$$

Application 34 : (Calcul de puissances) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Trouver les projecteurs spectraux, on écrit $d = \sum_\lambda \lambda \pi_\lambda$ et $n = \sum_\lambda (f - \lambda \mathrm{Id}) \pi_\lambda$.
- Calculer $d^p = \sum_\lambda \lambda^p \pi_\lambda$ et $n^p = \sum_\lambda (f - \lambda \mathrm{Id})^p \pi_\lambda$.
- Conclure avec $u^p = (d + n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} d^k n^{p-k}$.

Définition 35. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit $\exp(A) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p!} A^p$.*

Proposition 36. $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ *est bien défini et est continu. De plus, si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, alors*

1. *Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.*
2. *En particulier, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.*

Remarque 37 : L'exponentielle apparaît naturellement dans la résolution d'une équation différentielle $Y' = AY$ avec $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Application 38 : (Calcul de l'exponentielle) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Trouver les projecteurs spectraux, on écrit $d = \sum_\lambda \lambda \pi_\lambda$ et $n = \sum_\lambda (f - \lambda \mathrm{Id}) \pi_\lambda$.
- Calculer

$$e^d = \sum_\lambda e^\lambda \pi_\lambda \qquad \text{et} \qquad e^n = \sum_\lambda \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{(u - \lambda \mathrm{Id})^p}{p!} \right) \pi_\lambda$$

- Conclure avec $e^u = e^d e^n$.

Corollaire 39. $\exp(A)$ *est un polynôme en A.*

Proposition 40. *A est diagonalisable si, et seulement si, e^A est diagonalisable.*

3 Calcul approché des éléments propres

3.1 Méthode de la puissance

Théorème 41. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui a une unique valeur propre de module maximal λ. Alors, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda(A)$ est une droite vectorielle. De plus, on a*

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)$$

Théorème 42 (Méthode de la puissance)**.** *En reprenant les notations précédentes, on prend $x^{(0)} = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ et $z \in \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)$ et on pose ensuite*

$$x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|}$$

Alors, la suite $(x^{(k)})$ est bien définie et on a :

1. $\lim_{k \to +\infty} \|Ax^{(k)}\| = |\lambda| = \rho(A)$.

2. *Les suites $(x^{(2k)})$ et $x^{(2k+1)}$ convergent tous les deux vers un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
3. *Si $e_{1,j} \neq 0$, alors $\lim_{k\to+\infty} \frac{\left(Ax^{(k)}\right)_j}{x_j^{(k)}} = \lambda$.*

Remarque 43 :
- On peut en fait choisir $x^{(0)}$ au hasard, car $\mathrm{Im}(A-\lambda I_n)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, donc de mesure nulle.
- Si A est inversible, alors cette méthode appliquée à A^{-1} donne la valeur propre de plus petit module.

Proposition 44. *On reprend les notations précédentes et on note x un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre λ, alors les valeurs propres de $A-\lambda xx^T$ sont en module $< |\lambda|$.*

Remarque 45 : Si les valeurs propres de$A$ vérifient $|\lambda_1| > ... > |\lambda_n|$, cette méthode permet de calculer toutes les valeurs propres de A.

3.2 Décomposition QR et matrices de Househölder

Définition 46. *Soit $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on définit la matrice de Househölder associée $H_v = I_n - 2\frac{vv^*}{v^*v}$.*

Remarque 47 : Une matrice de Househölder H_v est la matrice d'une réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$.

Proposition 48. *Soit $a \in \mathbb{C}^n$ tel que les $n-1$ dernières coordonnées sont non tous nulles. Il existe une matrice de Househölder H_v tel que $H_v a$ ait ses $n-1$ dernières composantes nulles.*
Plus précisément, si $v_\pm = a \pm \|a\|e_1$, alors, $H_{v_\pm} a = \mp \|a\|_2 e_1$.

Remarque 49 : La méthode de Househölder pour les systèmes linéaires revient à trouver $n-1$ matrices de Househölder $H_1, ..., H_{n-1}$ telles que $H_{n-1}...H_2H_1A$ soit triangulaire supérieure, on peut alors "remonter" le système associé.
La résolution par la méthode de Househölder est en fait numériquement plus stable que le pivot de Gauss [1]. De plus, cette méthode donne aussi le calcul du déterminant en prêtant attention au signe car $\det(H_v) = -1$.

Lemme 50 (Décomposition LU). *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que tous les mineurs principaux sont inversibles, alors il existe un unique couple de matrice unitriangulaire inférieure L et d'une matrice triangulaire supérieure U telles que*

$$A = LU$$

1. Je ne parle pas de conditionnement, mais c'est ce qui est caché derrière.

Lemme 51 (Décomposition de Cholesky (admis)). *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe il existe une unique matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux > 0 B telle que $A = BB^*$.*

Théorème 52. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice unitaire Q et une matrice triangulaire supérieure R telle que $A = QR$.*
De plus, Q est produit de n matrices de Househölder et les coefficients diagonaux de R peuvent être pris $\geqslant 0$. Si A est inversible, alors cette décomposition est unique.

3.3 Application au calcul des éléments propres

Méthode 53 : (QR) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $A_1 = A = Q_1R_1$ sa décomposition QR et on pose ensuite $A_2 = R_1Q_1$ qu'on redécompose en $A_2 = Q_2R_2$. Plus généralement, si on a A_k, alors on écrit $A_k = Q_kR_k$ sa décomposition polaire et on pose $A_{k+1} = R_{k+1}Q_{k+1}$.

Proposition 54. *On définit ainsi une suite de matrices (A_k) toutes semblabes à A.*

Théorème 55. *On suppose que A est inversible et que ses valeurs propres sont de module tous distincts. On écrit $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et on suppose que P^{-1} admet une décomposition LU. Alors,*

$$\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i \qquad \text{et} \qquad \forall j < i, \lim_{k\to+\infty} (A_k)_{i,j} = 0$$

Remarque 56 : Autrement dit, la suite (A_k) "converge" vers une matrice triangulaire supérieure.. Attention, on a pas convergence de la suite (A_k) coefficients par coefficients.

Remarque 57 : La méthode de Househölder présentée précedemment permet de résoudre des systèmes linéaires, et donc on peut trouver à la main des vecteurs propres. Mais il existe une méthode plus efficace à partir de la suite (A_k) définie précédemment.

Références :

- Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.
- Gourdon, Algèbre.
- Rombaldi, Analyse matricielle.