

Pandou

1 avril 2022

## 1 Nombres complexes de module 1

On appellera  $U(1)$ ,  $\mathbb{U}$  ou encore  $\mathbb{S}^1$  l'ensemble des nombres complexes de module 1, selon le contexte (cf défense de plan).

### 1.1 Application exponentielle

**Définition 1.** Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on définit

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Remarque 2 :**  $\sum_n \frac{z^n}{n!}$  converge absolument pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposition 3.**  $\exp$  est une fonction entière, donc analytique et on a

$$\exp' = \exp$$

**Proposition 4.**  $\exp$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{C}, +)$  vers  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

**Théorème 5.** L'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in U(1)$  est surjective et son noyau est de la forme  $a\mathbb{Z}$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Remarque 6 :** On peut définir ainsi  $\pi$  comme étant  $\frac{a}{2}$ .

**Définition 7.** Si  $t \in \mathbb{R}$ , on définit

$$\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it}) \quad \text{et} \quad \sin(t) = \operatorname{Im}(e^{it})$$

**Proposition 8.** 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2.  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ .

3.  $\cos$  (resp.  $\sin$ ) sont  $C^\infty$ ,  $2\pi$ -périodiques et paire (resp. impaire).

**Application 9 :** L'application  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$  induit un homéomorphisme entre  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et  $SO_2(\mathbb{R})$  et donc,

$$SO_2(\mathbb{R}) \simeq U(1)$$

**Théorème 10.** L'application  $\arg : U(1) \setminus \{-1\} \rightarrow ]-\pi, \pi[$  réciproque de  $t \mapsto e^{it}$  est un homéomorphisme.

De plus, si  $z = x + iy \in U(1) \setminus \{1\}$ , alors

$$\arg(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$$

**Corollaire 11.** L'application définie par

$$\operatorname{Log} : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \mapsto \ln|z| + i\arg(z) \in \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| < \pi\}$$

est un biholomorphisme, dont la réciproque est l'exponentielle.

**Remarque 12 :** On parle de détermination principale du logarithme complexe, il faut cependant prêter attention que l'on a  $\operatorname{Log}(zz') \neq \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z')$ .

### 1.2 Le groupe $\mathbb{U}$

**Proposition 13.** Les sous-groupes compacts de  $\mathbb{C}^*$  sont des sous-groupes de  $\mathbb{U}$ .

**Définition 14.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$  les racines  $n$ -ièmes de l'unité.

**Proposition 15.** Les groupes  $\mathbb{U}_n$  sont cycliques. Un générateur est alors appelé racine primitive  $n$ -ième de l'unité.

**Corollaire 16.** Les sous-groupes de  $\mathbb{U}_n$  sont de la forme  $\mathbb{U}_d$  pour  $d$  divisant  $n$ .

**Application 17 :** On définit  $U_p = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^\alpha}$ , alors  $U_p$  n'est pas monogène, mais tous ses sous-groupes sont cycliques.

**Théorème 18.** Tout sous-groupe de  $\mathbb{U}$  est soit cyclique, soit dense dans  $\mathbb{U}$ .

**Application 19 :**  $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$  et  $\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$  sont denses dans  $[-1, 1]$ .

### 1.3 La topologie de $\mathbb{S}^1$

**Proposition 20.**  $\mathbb{S}^1$  est un compact connexe.

**Théorème 21.**  $\mathbb{S}^1$  n'est homéomorphe à aucune partie de  $\mathbb{R}$ .

**Corollaire 22.** Toute injection continue de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^1$  est un homéomorphisme.

**Théorème 23 (Admis).** La seule variété (topologique) de dimension 1 qui est compact et connexe est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ .

## 2 Utilisation en géométrie

### 2.1 Angles orientés du plan

Dans cette partie, on se place dans un plan affine réel  $\mathcal{P}$ .

**Définition 24.** On définit une relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires  $(u, v) \sim (u', v')$  si, et seulement si, il existe une rotation  $r$  telle que  $r(u) = u'$  et  $r(v) = v'$ .

La classe d'équivalence de  $(u, v)$  est appelée angle orienté de  $(u, v)$ , on note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des angles orientés du plan  $\mathcal{P}$ .

**Théorème 25.** Si  $u, v$  sont deux vecteurs unitaires de  $\mathcal{P}$ , alors il existe une unique rotation  $r_{u,v}$  qui envoie  $u$  sur  $v$ . Et alors l'application

$$R : (u, v) \in \mathcal{A} \mapsto r_{u,v} \in \mathcal{R}$$

où  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des rotations du plan, est une bijection.

**Remarque 26 :** Par transport de structure, on dispose d'une structure de groupe sur  $\mathcal{A}$ .

**Corollaire 27.** On oriente le plan  $\mathcal{P}$  et alors via  $R$ , on a une application qui dépend de l'orientation

$$\mathcal{A} \longrightarrow SO_2(\mathbb{R})$$

Alors, tout réel  $\theta$  tel que  $r_{u,v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  est appelé une mesure de l'angle  $(u, v)$ .

**Remarque 28 :** Tout angle orienté a une mesure, ie la composition suivante est surjective

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A}$$

### 2.2 Vers la théorie de Lie

**Théorème 29.**  $U(1)$  est un groupe de Lie de dimension 1 et son algèbre de Lie est  $\mathbb{R}$ .

#### DEVELOPPEMENT 1

**Lemme 30.** Soit  $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$  un morphisme de groupes continu, alors  $\psi$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et il existe  $X \in M_n(\mathbb{R})$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = e^{tX}$$

**Théorème 31.** Soit  $\varphi : U(1) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$  un morphisme de groupes continu, alors il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$  tels que

$$\varphi : e^{it} \in U(1) \mapsto Q \text{diag}(R_{k_1 t}, \dots, R_{k_r t}, 1, \dots, 1) Q^{-1}$$

$$\text{où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

## 3 Utilisation en algèbre

### 3.1 Polynômes cyclotomiques

**Définition 32.** On note  $\mu_n$  l'ensemble des racines primitives  $n$ -ièmes de l'unité et on pose

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mu_n} (X - \zeta) \in \mathbb{C}[X]$$

**Exemple 33 :**  $\Phi_1(X) = X - 1$ ,  $\Phi_2(X) = X + 1$ ,  $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$ .

**Proposition 34.** On a

$$\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$$

**Application 35 :**  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ .

**Exemple 36 :** Si  $p$  est premier, alors  $\Phi_p(X) = X^{p-1} + \dots + X + 1$ .

**Corollaire 37.**  $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ .

**Théorème 38.**  $\Phi_n(X)$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}[X]$ .

**Application 39 :** Soit  $p$  un nombre premier  $\geq 3$ , alors il n'existe pas d'élément d'ordre  $p$  dans  $GL_2(\mathbb{Q})$ .

**Corollaire 40.** Soit  $\zeta \in \mu_n$ , alors  $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$  est une extension de degré  $\varphi(n)$ .

### 3.2 Sous-groupes matriciels

**Proposition 41.** Soit  $G$  un sous-groupe borné de  $GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $G \subset B(I_n, \sqrt{2})$ , alors  $G$  est trivial.

**Proposition 42.** Les sous-groupes finis de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sont cycliques.

**Proposition 43.** Tout élément de  $GL_2(\mathbb{Z})$  d'ordre fini est d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 16.

#### DEVELOPPEMENT 2

**Lemme 44.** Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire, dont toutes les racines sont de module  $\leq 1$  et  $P(0) \neq 0$ . Alors les racines de  $P$  sont des racines de l'unité.

**Théorème 45.** Il n'y a, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de sous-groupes finis de  $GL_n(\mathbb{Z})$ .

**Théorème 46** (Burnside). Tout sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  d'exposant fini est fini.

### 3.3 Représentation des groupes finis

On fixe un groupe  $G$  fini.

**Définition 47.** Une représentation de  $G$  est un couple  $(\rho, V)$  où  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  un morphisme de groupes.

Le caractère d'une représentation est l'application  $\chi_V : g \in G \mapsto \text{Tr}(\rho(g))$ .

**Proposition 48.** Soit  $(\rho, V)$  une représentation de  $G$ , alors pour tout  $g \in G$ ,  $\rho(g)$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

**Corollaire 49.** Soit  $(\rho, V)$  une représentation de  $G$ , alors

- $\forall g \in G, \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ .
- $\text{Ker}(\rho) = \{g \in G, \chi_V(g) = \dim(V)\}$ .

**Définition 50.** On dit qu'une représentation  $(\rho, V)$  est irréductible si les seuls sous-espaces de  $V$  stables par  $G$  sont  $\{0\}$  et  $V$ .

**Théorème 51** (Maschke). Toute représentation  $(\rho, V)$  de  $G$  se décompose en somme de représentations irréductibles.

**Corollaire 52.**  $G$  est abélien si, et seulement si, toutes les représentations irréductibles de  $G$  sont de dimension 1.

**Théorème 53** (Schur). Soit  $V$  et  $W$  deux représentations irréductibles de  $G$ , alors

$$\dim(\text{Hom}_G(V, W)) = \begin{cases} 0 & \text{si } V \text{ et } W \text{ ne sont pas isomorphes} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 54.** On note  $R(G)$  l'ensemble des fonctions  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  constantes sur les classes de conjugaisons de  $G$ .

**Théorème 55** (Admis). L'ensemble des caractères irréductibles de  $G$  forme une base de  $R(G)$ .

**Corollaire 56.** Il y a autant de caractères irréductibles de  $G$  que de classes de conjugaisons de  $G$ .

**Définition 57.** La table des caractères de  $G$  est un tableau dont les colonnes sont indexées par les classes de conjugaison  $\mathcal{C}_j$  de  $G$  et les lignes par les représentations irréductibles  $\chi_i$  de  $G$ .

Dans la case  $(i, j)$ , on inscrit la valeur  $\chi_i(\mathcal{C}_j)$ .

**Exemple 58 :** Table de caractères de  $\mathfrak{S}_3$ .

#### Références :

- FGN Algèbre 2.
- Pommellet.
- Eiden, Géométrie analytique classique.
- Serre, Représentations des groupes finis.