266

Illustration de la notion d'indépendance en probabilités

Soit $(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$ espace probabilisé, I ensemble, $(E;\mathcal{B})$ espace probabilisable

I] Notion d'indépendance

1] Événements et tribus indépendantes

[Bale] IV.1

Définition 1 : On dit que $A,B\in\mathcal{A}$ sont indépendants si :
$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Exemple 2 : Soit X le résultat d'un lancer de dé rouge et Y le résultat d'un lancer de dé bleu. Les événements : $A:=\{X\leq 4\}$ et $B=\{Y=6\}$ sont indépendants.

Définition 3 : On dit que $(A_i)\in\mathcal{A}^I$ sont mutuellement indépendants si : $\forall J\subseteq I$ fini, $\mathbb{P}(\bigcap_{j\in J}A_j)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(A_j)$

On dit que les (A_i) sont 2 à 2 indépendants si : $\forall i\neq j$, $\mathbb{P}(A_i\cap A_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

Proposition 4 : Si (A_i) sont mutuellement indépendants, alors : (A_i) sont 2 à 2 indépendants

Contre-exemple 5 : Soit un jet de dés et les événements : $A:=(X\in\{1;3;5\})$, $B=(Y\in\{1;3;5\})$; $C:=(X+Y\in\{1;3;5\})$. La famille d'événements est 2 à 2 indépendante, non-mutuellement indépendante.

Définition 6 : On dit que $(\mathcal{A}_i)\in\mathcal{A}^I$ sous-tribus de $\mathcal{A}$ sont mutuellement indépendantes si : $\forall(A_i)\in\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$, (A_i) est mutuellement indépendante.

2] Variables aléatoires indépendantes

IV.1 [Bale]

Définition 7 : On dit qu'une famille (X_i) de variables aléatoires est indépendante si : $\forall J\subseteq I$ fini, $\forall (B_j)_{j\in J}\in\mathcal{B}^J$, on a :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J}\{X_j\in B_j\}\Big)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j\in B_j)$$

IV.1 [Bale]

Exemple 8 : Soit X_1,X_2 les projections de $[\![1;6]\!]^2$ sur la première et seconde composante ($X_1(i;j)=i$; $X_2(i;j)=j$). X_1 et X_2 sont indépendantes.

Proposition 9 : Soit $(X_1;\dots;X_n)$ v.a. réelles.
Alors : $(X_1;\dots;X_n)$ sont indépendantes ssi $\mathbb{P}_{(X_1;\dots;X_n)}=\mathbb{P}_{X_1}\otimes\dots\otimes\mathbb{P}_{X_n}$

Exemple 10 : Soit $(X;Y)$ v.a. à densité $(x;y)\mapsto f(x)g(y)$.
Alors : X et Y sont indépendantes de densités respectives f et g si $\int f(x)dx=1$.

Proposition 11 : Une famille de v.a. $(X_i)_{i\in I}$ est indépendante ssi $\forall J\subseteq I$ fini, $\forall(\Phi_j)\in L^1$, $\mathbb{E}\Big[\prod_{j\in J}\Phi_j(X_j)\Big]=\prod_{j\in J}\mathbb{E}[\Phi_j(X_j)]$.

Corollaire 12 : Soit $(X_1;\dots;X_n)$ v.a. réelles.
Alors : $(X_1;\dots;X_n)$ sont indépendants ssi $\forall(t_1;\dots;t_n)\in\mathbb{R}^n$,
$$\varphi_{(X_1;\dots;X_n)}(t_1;\dots;t_n)=\varphi_{X_1}(t_1)\times\dots\times\varphi_{X_n}(t_n)$$

II] Propriétés probabilistes liées à l'indépendance

1] Loi du 0-1 de Kolmogorov et lemme de Borel-Cantelli

IV.3 [Bale]

Définition 13 : Soit $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille de tribus indépendantes. On note $\mathcal{A}_n=\sigma(\mathcal{T}_n;\mathcal{T}_{n+1};\dots)$ et $\mathcal{A}_\infty=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ est appelée tribu terminale ou tribu asymptotique.

Exemple 14 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ événements indépendants et $(\mathcal{T}_n:=\sigma(A_n)=\{\emptyset;\Omega;A_n;A_n^c\})_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, on a :
$$A:=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}A_m\in\mathcal{A}_\infty$$

Exemple 15 : Si (X_n) v.a. réelles indépendantes, $(\mathcal{T}_n:=\sigma(X_n))$ et $(a_n)\in\mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$ tels que $\lim_{+\infty}a_n=+\infty$, alors l'événement $A=\Big(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k \text{ converge}\Big)\in\mathcal{A}_\infty$

Théorème 16 : (du 0-1 de Kolmogorov) Soit $A\in\mathcal{A}_\infty$.
Alors : $\mathbb{P}(A)=0$ ou $\mathbb{P}(A)=1$

IV.3 **Théorème 17:** (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Alors: (1) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)<+\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{+\infty} A_n)=0$ (presque sûrement, seulement un nombre fini d'événements A_n sont réalisés).

[Bale] (2) Si (A_n) sont indépendants, et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)=+\infty$, alors: $\mathbb{P}(\limsup A_n)=1$ (presque sûrement, une infinité de A_n sont réalisés).

V.1 **Corollaire 18:** Soit (X_n) v.a. réelles, X v.a. réelle.

Alors: (1) Si $\forall\varepsilon>0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\varepsilon)<+\infty$, alors $X_n \xrightarrow[+\infty]{p.s.} X$

(2) Si les (X_n) sont mutuellement indépendants, alors: $X_n\xrightarrow[+\infty]{p.s.}0$ ssi $\forall\varepsilon>0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon)<+\infty$

2| Sommes de variables aléatoires indépendantes

Soit X, Y deux v.a. indépendantes.

IV.2 **Proposition 19:** La loi de $X+Y$ est donné par $\mathbb{P}_{X+Y}=\mathbb{P}_X*\mathbb{P}_Y$

Proposition 20: La fonction caractéristique de $X+Y$ est: $\varphi_{X+Y}=\varphi_X\varphi_Y$

Exemple 21: Si $X=a$ et $Y=b$ p.s. alors X et Y sont indépendantes et $X+Y=a+b$ ie. $\delta_{a+b}=\delta_a*\delta_b$

[Bale] **Exemple 22:** Si $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$, $Y\sim\mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Exemple 23: Si $(X_1,\dots,X_n)$ sont iid de loi $\mathcal{B}(1;p)$, alors: $\sum_{k=1}^n X_k\sim\mathcal{B}(n;p)$

Proposition 24: Si X,Y sont deux v.a. de densités f et g,
Alors: $X+Y$ est de densité $h=f*g$

3| Comportement à l'infini de ces sommes

Soit (X_n) suite de variables aléatoires iid

V.1 **Remarque 25:** Le théorème de Borel-Cantelli ne fournit pas la limite p.s. vers laquelle tend X_n.

Exemple 26: Soit (X_n) v.a. iid de loi $\mathcal{B}(1;p)$ et $(U_n=\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^i})_{n\in\mathbb{N}}$. (U_n) converge presque sûrement, mais vers où ?

V.5 **Théorème 27:** (loi faible des grands nombres) Si $\mathbb{E}[|X_1|]<+\infty$,
Alors: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}}\mathbb{E}[X_1]$

[Bale] **Théorème 28:** (loi forte des grands nombres) Si $\mathbb{E}[|X_1|]<+\infty$,
Alors: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[+\infty]{p.s.}\mathbb{E}[X_1]$

Application 29: Soit $I=[0,1]^d$, $A,B\in\mathbb{R}_+$ et $f\in L^1(I)$ telle que $|f|\leq A$ p.p. et $\int_I f^2\leq B$. Soit (X_n) v.a. iid de loi $\mathcal{U}(I)$ et soit $(e_n:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(X_k)-\int_I f)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Alors: $e_n\xrightarrow[+\infty]{p.s.}0$ et $\forall\varepsilon\in]0,\frac{B}{A}[$, $\mathbb{P}(|e_n|\geq\varepsilon)\leq 2\exp(-\frac{n\varepsilon^2}{4B})$

Théorème 30: (central limite) Si $\mathbb{E}[X_1^2]<+\infty$
Alors: $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mathbb{E}[X_1]\right)\xrightarrow[+\infty]{loi}\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

Exemple 31: Si $X_n\sim\mathcal{B}(1;p)$, alors $\forall a<b$,
$$\lim \mathbb{P}\left(a\leq\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\left(\sum_{k=1}^n X_k-np\right)\leq b\right)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

III| Notion plus faible d'indépendance et application de l'indépendance

1| Notion de non-corrélation

IV.1 [Bale] **Définition 32:** Deux variables aléatoires $X,Y\in L^2$ sont dites non-corrélées si: $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Remarque 33: Autrement dit, $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]=0$ et on dit que $(X-\mathbb{E}[X])$ et $(Y-\mathbb{E}[Y])$ sont orthogonales.

Proposition 34: Soit $X,Y\in L^2$ indépendantes.
Alors: X et Y sont non-corrélées

IV.1

<u>Contrexemple 35</u> : La réciproque est fausse

Pour $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ et $Y = X^2$, X et Y sont non-corrélées mais ne sont pas indépendantes.

[Dale]

<u>Proposition 36</u> : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ v.a. deux à deux non-corrélées.

<u>Alors</u> : (1) (Identité de Bienaymé) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

(2) (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_i]\right| \geq t\right) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

2) Quelques applications de l'indépendance

[Les]

<u>Lemme 37</u> : Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \xrightarrow[+\infty]{} b$ et $a \in [0;1[$.

<u>Alors</u> : pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b_n$, (u_n) converge.

<u>Théorème 38</u> : Soit $p \in]0;1[$, (ξ_n) v.a. de loi $\mathcal{B}(1;p)$, (U_n) v.a. de loi $U_0 \sim \mathcal{U}([0;1])$ telles que toutes les v.a. introduites sont indépendantes, soit $X_0 = x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = U_n X_n + \xi_n (1 - U_n)$

<u>Alors</u> : la suite (X_n) converge en loi vers une loi Bêta de paramètres p et 1-p : $\beta(p;1-p)$.

[Ber]

<u>Lemme 39</u> : Soit X v.a. réelle $\mathbb{P}$-p.s. bornée par 1, centrée.

<u>Alors</u> : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$

<u>Théorème 40</u> : (Inégalité de Hoeffding) Soit (X_n) suite de v.a. réelles indépendantes, bornées p.s., centrées telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists c_n > 0 \mid \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$

<u>Application 41</u> : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq n^{2\alpha - \beta}$

<u>Alors</u> : $\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[+\infty]{p.s.} 0$

[ZQ]

<u>Application 42</u> : (processus de Galton-Watson) Soit $X \in L^1$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k < +\infty$

$(X_{i,j})$ v.a. indépendantes de loi $\mathbb{P}_X$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$, soit $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $\mathbb{P}_{ext} = \mathbb{P}(\{\exists n \in \mathbb{N} \mid Z_n = 0\})$.

<u>Alors</u> : (1) Si $m > 1$, alors $\mathbb{P}_{ext}$ est l'unique point fixe de $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k s^k$ sur $]0;1[$

(2) Si $m \leq 1$, alors $\mathbb{P}_{ext} = 1$.

Références :

[BaLe] Probabilité - Barbe

[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre

[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques - Bernis

[NR] No Reference