265

Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

I] Exemples de fonctions usuelles

1] La fonction exponentielle

Définition 1 : On appelle exponentielle complexe la fonction $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$, notée exp.

Proposition 2 : La fonction exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$

Proposition 3 : Soit $z, w \in \mathbb{C}$.
Alors : (i) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
(ii) $\exp(z) \neq 0$
(iii) $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$
(iv) $|\exp(z)| = \exp(Re(z))$
(v) $|\exp(z)| = 1$ ssi $z \in i\mathbb{R}$

Théorème 4 : $\exp : (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{C}^*;\times)$ est un morphisme continu, surjectif, non-injectif, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 5 : L'application $\begin{array}{l} (\mathbb{R};+) \to (\mathbb{U};\times) \\ t \mapsto e^{it} \end{array}$ est un morphisme de groupes surjectif, non-injectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 6 : La restriction de la fonction exp à $\mathbb{R}$ coïncide avec l'exponentielle réelle, qui, elle, est $\exp_{\mathbb{R}}$ injective sur $\mathbb{R}$.

2] Fonctions circulaires et hyperboliques

Définition 7 : On appelle cosinus et sinus réels les fonctions cos : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto Re(\exp(it)) \end{array}$ et sin : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto Im(\exp(it)) \end{array}$.

Proposition 8 : Soit $t \in \mathbb{R}$.
Alors : $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}$
$\cos(t) = \sum_{i}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ $\quad \sin(t) = \sum_{i}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Proposition 9 : cos et sin sont indéfiniment dérivables et $(\sin)' = \cos$, $(\cos)' = -\sin$.

Proposition 10 : (formules d'Euler) Soit $t \in \mathbb{R}$.
Alors : $\cos(t) = \frac{1}{2}[\exp(it) + \exp(-it)]$; $\sin(t) = \frac{1}{2i}[\exp(it) - \exp(-it)]$

Proposition 11 : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Définition 12 : On définit les applications complexes suivantes :
cos : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{i}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{array}$; sin : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{i}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}$

ch : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{i}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{array}$; sh : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{i}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}$

Proposition 13 : Les fonctions cos et sin vérifient les mêmes propriétés que leurs correspondants réels.

3] Déterminations continues du logarithme

Définition 14 : Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert. On appelle détermination continue du logarithme sur U toute application continue $\ell : U \to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in U$, $\exp[\ell(z)] = z$.

Proposition 15 : Soit $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert.
Alors : (1) Les déterminations continues du logarithme sont de la forme $\begin{array}{l} U \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \ln|z| + i\theta(z) \end{array}$ avec θ une application continue telle que $\forall z \in U$, $\exp[i\theta(z)] = \frac{z}{|z|}$.
(2) Si U est en plus connexe, et $\ell_1, \ell_2 : U \to \mathbb{C}$ sont deux déterminations continues du logarithme, alors : $\exists k \in \mathbb{Z} \backslash$ $\forall z \in U$, $\ell_1(z) - \ell_2(z) = 2ik\pi$

Définition 16 : On appelle détermination principale du logarithme la fonction : log : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_- \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \ln|z| + i Arg(z) \end{array}$ avec $Arg : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ l'unique θ telle que $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, $Arg(z) \in]-\pi;\pi[$

Proposition 17 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
Alors : $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

II] Fonctions spéciales

1] Fonction Gamma d'Euler

[IX.II.1]

Définition 18 : On appelle fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \end{array}$$

Proposition 19 : (1) Γ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\} =: \mathcal{I}$

(3) $\forall z \in \mathcal{I}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$

[ZQ]

Proposition 20 : (formule du produit d'Euler)

$\forall z \in \mathcal{I}$, $\Gamma(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^z n!}{z(z+1)\times\cdots\times(z+n)}$

Théorème 21 : La fonction Γ se prolonge en une unique fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

2] Fonction Bêta d'Euler

[Les]

Définition 22 : On appelle fonction Bêta d'Euler :

$$B : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (p;q) & \longmapsto & \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \end{array}$$

Proposition 23 : Soit $p, q \in \mathcal{I}$.

Alors : $B(p;q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)^{p-1} \sin^2(\theta)^{q-1}\, 2\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta$

Proposition 24 : Soit $p \in \mathcal{I}$.

Alors : $B(p;1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}$

Application 25 : Soit $p, q \in \mathcal{I}$.

Alors : $B(p;q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

[Les]

Lemme 26 : Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $b_n \to b$ et $a \in [0;1[$.

Alors : pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b_n$, (u_n) converge

Théorème 27 : Soit $p \in]0;1[$, (ξ_n) v.a. de même loi $\xi_0 \sim \mathcal{B}(1;p)$

(U_n) v.a. de même loi $U_0 \sim \mathcal{U}([0;1])$ telles que toutes les v.a. sont indépendantes. Soit $X_0 = x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$X_{n+1} = U_n X_n + \xi_n(1-U_n)$

Alors : la suite (X_n) converge en loi vers une loi bêta de paramètres $p, 1-p$: $B(p;1-p)$.

3] Fonction Zeta de Riemann

[II.I.2] [ZQ] [II.III.1]

Définition 28 : On appelle fonction Zêta de Riemann :

$$\zeta : \begin{array}{ccc} \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array}$$

Proposition 29 : La fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{I} \setminus \{1\}$.

Proposition 30 : Il existe une fonction ζ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ telle que :

(1) $\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \eta(s)$ avec η holomorphe sur $\mathbb{C}$

(2) $\forall s \in \mathbb{C}$ telle que $Re(s) > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$

(3) En notant $\mathcal{I}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$, on a : $\mathcal{I}(s) = \mathcal{I}(1-s)$.

III] Quelques applications des fonctions usuelles aux probabilités

1] Aux fonctions génératrices

Soit par la suite $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit I un ensemble.

I.3 [Ouv1]

Définition 31 : Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a.d. On appelle fonction génératrice de X : $G_X : \begin{array}{l}[-1;1] \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \mathbb{E}[\exp(X \ln(s))]\end{array}$

Remarque 32 : C'est l'équivalent discret des fonctions caractéristiques : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Proposition 33 : (1) $\forall s \in [-1;1]$, $G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)s^n$
(2) G_X caractérise la loi de X : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition 34 : Soit $X;Y : \Omega \to \mathbb{N}$.
Alors : $\forall s \in [-1;1]$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$.

[NR]

Application 35 : Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a.d., $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X=k)$, $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{k}^{+\infty} k p_k < +\infty$, soit $(X_{i,j})$ v.a. indépendantes suivant la loi $\mathbb{P}_X$ et (Z_n) telle que $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$. Soit $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $\mathbb{P}_{ext} = \mathbb{P}(\{\exists n \in \mathbb{N} \mid Z_n = 0\})$.
Alors : (1) Si $m > 1$, alors $\mathbb{P}_{ext}$ est l'unique point fixe de G_X sur $]0;1[$
(2) Si $m \leq 1$, alors $\mathbb{P}_{ext} = 1$.

2) Aux inégalités en probabilités

I.2 [Ouv1]

Lemme 36 : Soit $a,b,p,q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors : $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

Proposition 37 : (Inégalité de Hölder) Soit $p,q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit $(x_i), (y_i), (\rho_i) \in \mathbb{R}_+^I$
Alors : $\sum_{i \in I} x_i y_i \rho_i \leq \left(\sum_{i \in I} x_i^p \rho_i\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \in I} y_i^q \rho_i\right)^{\frac{1}{q}}$

Proposition 38 : Soit $p,q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit $X, Y \in L_d^p(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P}) \times L_d^q(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$.
Alors : $XY \in L_d^1(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[|X^p|])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[|X^q|])^{\frac{1}{q}}$

[Bor]

Lemme 39 : Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a., $\mathbb{P}$-presque sûrement bornée par 1 et centrée.
Alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$

Théorème 40 : (Inégalité de Hoeffding) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de v.a. réelles indépendantes, bornées presque sûrement, centrées telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists c_n > 0 \mid |X_n| \leq c_n$, et soit $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$

Application 41 : Soit $X_1;\dots;X_n$ v.a. iid de loi $\mathcal{B}(1;p)$ pour $p \in]0;1[$.
Alors : $\forall \alpha \in]0;1[$, $\left[\frac{1}{n}S_n - \sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)} ; \frac{1}{n}S_n + \sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right]$ est un intervalle de confiance par excès au niveau $1-\alpha$ du paramètre d'intérêt p.

Références:

[Tou] Analyse complexe pour la licence 3 - Tauvel

[ZQ] Analyse pour l'agrégation - Zuily

[Les] 131 développements pour l'agrégation - Lesesvre

[Ouv1] Probabilités 1 - Ouvrard

[NR] No Reference ¨

[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques - Bernis