264

Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Soit $(\Omega; \mathcal{A})$ espace probabilisable et E ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$

I] Variables aléatoires discrètes

1] Notion de variable aléatoire discrète

[I.5] [Ouv 1]

Définition 1 : Une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète (v.a.d.) si :
(i) $X(\Omega)$ est dénombrable (ii) $\forall x \in E$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$

Si X est à valeurs dans $(E; \mathcal{E})$ espace probabilisable, alors on appelle loi de probabilité de X : $\mathbb{P}_X : \begin{array}{l} \mathcal{E} \to [0;1] \\ A \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \end{array}$

Remarque 2 : Si X est à valeurs dans $(E; \mathcal{E})$, alors sa loi est déterminée par le germe de probabilité $x \mapsto \mathbb{P}(X=x)$ sur $(E; \mathcal{E})$.

Exemple 3 : La probabilité qu'en jetant 6 dés équilibrés et discernables toutes les faces exhibent un chiffre différent est de $\frac{6!}{6^6}$

Exemple 4 : La probabilité que, parmi n étudiants, au moins 2 ont leur anniversaire le même jour est de $1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$

2] Lois usuelles

[I.4] [Ouv 1]

Définition 5 : La loi uniforme sur un ensemble fini Ω est telle que : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Remarque 6 : On ne peut pas définir par ce même procédé une loi uniforme sur un ensemble non-fini.

Exemple 7 : La probabilité d'obtenir k fois le chiffre 6 parmi n lancés de dés équilibrés est de $\binom{n}{k} \frac{5^{n-k}}{6^n}$

Définition 8 : Soit $p \in]0;1[$. La loi de Bernoulli de paramètre p est telle que $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$. Notée $\mathcal{B}(1;p)$.

Exemple 9 : La loi de Bernoulli modélise une expérience aléatoire à deux résultats possibles.
Le lancé d'une pièce équilibrée se modélise par une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

[I.4] [Ouv 1]

Définition 10 : Soit $\Omega = \{0;1;\dots;n\}$, $p \in]0;1[$. La loi binomiale de paramètres n et p est telle que : $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Notée $\mathcal{B}(n;p)$.

Exemple 11 : La loi binomiale modélise le nombre de succès lors de n épreuves de Bernoulli.
En reprenant l'exemple 7, on retrouve bien que la probabilité d'obtenir k fois le chiffre 6 parmi n lancés est : $\binom{n}{k} \frac{5^{n-k}}{6^n}$.

Définition 12 : Soit $\Omega = \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. La loi de Poisson de paramètre λ est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$. Notée $\mathcal{P}(\lambda)$

Remarque 13 : Modélise des phénomènes de comptage : nombre de désintégrations atomiques, d'arrivées à un guichet, ...

Définition 14 : Soit $\Omega = \mathbb{N}$ (resp. $\Omega = \mathbb{N}^*$), $p \in]0;1[$. La loi géométrique sur $\mathbb{N}$ (resp. sur $\mathbb{N}^*$) est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^n$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}$). Notée $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ (resp. $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$).

Remarque 15 : Modélise le nombre d'échecs rencontrés avant d'obtenir un succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

3] Espérance et variance

[V.1] [Ouv 1]

Définition 16 : Soit X v.a.d. réelle telle que $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| \, \mathbb{P}(X=x) < +\infty$.
On dit que X possède une moyenne : $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \, \mathbb{P}(X=x)$.

Exemple 17 : Soit $p \in]0;1[$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. L'espérance d'une loi :
(1) $\mathcal{B}(1;p)$ est : p
(2) $\mathcal{B}(n;p)$ est : np
(3) $\mathcal{P}(\lambda)$ est : λ
(4) $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ est : $\frac{1-p}{p}$ ($\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$: $\frac{1}{p}$)

Contrexemple 18 : Si X suit une loi $\frac{6}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\delta_k}{k^2}$, alors X n'a pas de moyenne.

Théorème 19 : (de transfert) Soit $X : \Omega \to E$ v.a.d., $f : E \to \mathbb{R}$
Alors : $f(X) = f \circ X$ est une v.a.d.
et $f(X)$ admet une moyenne ssi $\sum_{x \in E} |f(x)| \, \mathbb{P}(X=x)$
Dans ce cas, $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in E} f(x) \, \mathbb{P}(X=x)$

I.2

Définition 20 : Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On note $L^p_d(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$ l'ensemble des v.a.d. réelles X telles que $\mathbb{E}[|X|^p]<+\infty$.
Si $X\in L^p_d(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$, alors on appelle moment d'ordre p de X

$$\mathbb{E}[X^p]=\sum_{x\in\mathbb{R}} x^p\,\mathbb{P}(X=x)$$

Proposition 21 : (Inégalité de Schwarz) Soit $X,Y\in L^2_d(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$.
Alors : $XY\in L^1_d(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[XY]\le\mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{E}[Y^2]^{\frac{1}{2}}$

Définition 22 : Soit $X\in L^2_d(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$. On appelle variance de X : $Var(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$

[Ouv 1]

Proposition 23 : Soit $X\in L^2_d(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$.
Alors : (1) $Var(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2$
(2) $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $Var(aX+b)=a^2\,Var(X)$.

Exemple 24 : Soit $p\in]0;1[$, $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. La variance d'une loi :
(1) $\mathcal{B}(1;p)$ est : $p(1-p)$
(2) $\mathcal{B}(n;p)$ est : $np(1-p)$
(3) $\mathcal{P}(\lambda)$ est : λ
(4) $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ est : $\frac{1-p}{p^2}$ ($\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$: $\frac{1-p}{p^2}$)

Proposition 25 : (Inégalité de Markov) Soit $X\in L^1_d(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$.
Alors : $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|X|\ge\varepsilon)\le\frac{\mathbb{E}[|X|]}{\varepsilon}$

Proposition 26 : (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit $X\in L^2_d(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$
Alors : $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\ge\varepsilon)\le\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

Lemme 27 : Soit X v.a. réelle $\mathbb{P}$-p.s. bornée par 1, centrée.
Alors : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}[\exp(tX)]\le\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$

Théorème 28 : (Inégalité de Hoeffding) Soit (X_n) suite de v.a. réelles, indépendantes, bornées p.s., centrées telles que :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists c_n>0 \mid |X_n|\le c_n$ et soit $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.
Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|S_n|\ge\varepsilon)\le 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n}c_j^2}\right)$

[Ber]

Application 29 : Soit $X_1,\dots,X_n$ v.a. mutuellement indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(1;p)$, $p\in]0;1[$.
Alors : $\forall\alpha\in]0;1[$, $\left[\frac{1}{n}S_n-\sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)};\ \frac{1}{n}S_n+\sqrt{\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right]$ est un intervalle de confiance par excès au niveau $1-\alpha$ de paramètre p.

III] Variables indépendantes et fonctions génératrices

1] Indépendance et somme de v.a. indépendantes

III.2

Définition 30 : Soit $(X_i:\Omega\to E_i)_{i=1}^n$ avec $(E_i;\mathcal{E}_i)$ espaces probabilisables. On dit que les (X_i) sont indépendantes si :
$\forall(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_1=x_1;\dots;X_n=x_n)=\mathbb{P}(X_1=x_1)\times\dots\times\mathbb{P}(X_n=x_n)$

Proposition 31 : Soit X_1,X_2 v.a.d. indépendantes à valeurs dans $(E;\mathcal{E})$ espace probabilisable avec E groupe pour l'addition.
Alors : X_1+X_2 est une v.a.d. de loi telle que :
$\forall x\in E$, $\mathbb{P}(X_1+X_2=x)=\sum_{y\in E}\mathbb{P}(X_1=y)\,\mathbb{P}(X_2=x-y)$

[Ouv 1]

Exemple 32 : (1) Si $X_1\sim\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2\sim\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1+X_2\sim\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$
(2) Si $X_1\sim\mathcal{B}(n_1;p)$ et $X_2\sim\mathcal{B}(n_2;p)$, alors $X_1+X_2\sim\mathcal{B}(n_1+n_2;p)$.

2] Fonctions génératrices

III.3

Définition 33 : Soit $X:\Omega\to\mathbb{N}$ v.a.d., $s\in[-1;1]$. On appelle fonction génératrice de X : $G_X(s)=\mathbb{E}[s^X]$.

Proposition 34 : Soit $X:\Omega\to\mathbb{N}$ v.a.d.
Alors : (1) $\forall s\in[-1;1]$, $G_X(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}s^n\,\mathbb{P}(X=n)$
(2) La fonction G_X caractérise la loi de X et $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X=n)=\frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

[Ouv 1]

Exemple 35 : Soit $p\in]0;1[$, $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. La fonction génératrice de :
(1) $\mathcal{B}(n;p)$ est : $G_X(s)=[ps+(1-p)]^n$
(2) $\mathcal{P}(\lambda)$ est : $G_X(s)=\exp[\lambda(s-1)]$
(3) $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ est : $G_X(s)=\frac{p}{1-(1-p)s}$
(4) $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$ est : $G_X(s)=\frac{ps}{1-(1-p)s}$

Proposition 36 : Soit $X,Y:\Omega\to\mathbb{N}$ v.a.d.
Alors : $\forall s\in[-1;1]$, $G_{X+Y}(s)=G_X(s)G_Y(s)$

Proposition 37 : Soit $X:\Omega\to\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}^*$.
Alors : X a un moment d'ordre r ssi G_X est r fois dérivable à gauche en 1

En particulier, $\mathbb{E}[X]=G_X'(1^-)$

[NR]

Application 38: (processus de Galton-Watson) Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a.d., $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k := \mathbb{P}(X=k)$ et $m := \mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, p_k < +\infty$.
Soit $(X_{i,j})$ v.a. indépendantes suivant la loi $\mathbb{P}_X$ et (Z_n) telle que $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$, soit $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $\mathbb{P}_{ext} = \mathbb{P}(\{\exists n \in \mathbb{N} \mid Z_n = 0\})$.
Alors : (1) Si $m > 1$, alors : $\mathbb{P}_{ext}$ est l'unique point fixe de G_X sur $]0;1[$.
(2) Si $m \leq 1$, alors $\mathbb{P}_{ext} = 1$.

III] Théorèmes limite et approximations

1] Approximation par la loi de Poisson

VII.1 [Ouv1]

Théorème 39: (de Poisson) Soit $(p_n) \in]0;1[^{\mathbb{N}}$ telle que $n p_n \xrightarrow[+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \sim \mathcal{B}(n; p_n)$ i.e. $\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Alors : $\lim \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 40: Ainsi, pour p assez petit et n assez grand, on peut approcher $\mathcal{B}(n;p)$ par $\mathcal{P}(np)$.

Exemple 41: Le nombre de personnes nés le 1er janvier parmis n personnes suit une loi $\mathcal{B}(n; \frac{1}{365})$ que l'on peut approcher par $\mathcal{P}(\frac{n}{365})$ lorsque n est grand.

2] Loi des grands nombres et théorème central limite

X.4 [Ouv2]

Théorème 42: (loi forte des grands nombres) Soit $(X_n : \Omega \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de v.a. indépendantes dans $L^2(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ telles que :
$\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[+\infty]{} m$ et $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{Var(X_j)}{j^2} < +\infty$
Alors : $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[+\infty]{p.s.} m$ et $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[+\infty]{L^2} m$

Exemple 43: On lance un dé, $X_n = 1$ si le n-ième lancé tombe sur 6 et 0 sinon. Alors : $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[+\infty]{p.s.;\, L^2} \frac{1}{6}$.

VII.1 [Ouv1]

Théorème 44: (de Moivre-Laplace) Soit $p \in]0;1[$, $(S_n \sim \mathcal{B}(n;p))$ et $(\overline{S_n} := \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}})$ variables centrées réduites associées à S_n
Alors : $\sup_{a<b} \left| \mathbb{P}(a < \overline{S_n} \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Remarque 45: La loi de $\overline{S_n}$ peut être approchée par $\mathcal{N}(0;1)$ lorsque n est grand.

<u>Références</u> :

[Ouv1] Probabilités 1 - Ouvrard
[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques - Bernis
[NR] No Reference ¨
[Ouv2] Probabilités 2 - Ouvrard