262

Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Soit $(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$ espace probabilisé, (X_n) et X variables aléatoires définies sur $(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$, $p\in]0;+\infty[$

I] Différents modes de convergence

1] Convergence presque sûre

I.1 [Bale]

Définition 1: On dit que (X_n) converge presque sûrement (p.s.) vers X si : $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X_n(\omega)\xrightarrow[+\infty]{}X(\omega)\})=\mathbb{P}(X_n\to X)=1$.
On note $X_n \xrightarrow[+\infty]{p.s.} X$

Théorème 2: (Critère de Cauchy) : $X_n \xrightarrow[+\infty]{p.s.} X$ ssi $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq n}\{|X_n-X_m|<\varepsilon\}\right)=1$

Remarque 3: Le critère de Cauchy assure la convergence sans jamais connaître la limite X.

Exemple 4: Pour $X_n\sim\mathcal{B}(1;p)$, $U_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{2^i}$, (U_n) converge p.s.

Lemme 5: (de Borel-Cantelli) Si (X_n) et X sont à valeurs dans $\mathbb{R}$,
Alors : (1) si $\forall\varepsilon>0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\varepsilon)<+\infty$, alors $X_n\xrightarrow[+\infty]{p.s.}X$
(2) Si les X_n sont indépendantes, alors $X_n\xrightarrow[+\infty]{p.s.}0$ ssi $\forall\varepsilon>0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(|X_n|>\varepsilon)<+\infty$

Application 6: Pour $X_i\sim\mathcal{E}(1)$ i.e. $\mathbb{P}(X_i>t)=e^{-t}$, $M_n=\max\{(X_i)_{i=1}^{n}\}$
on a : $\frac{M_n}{\ln(n)}\geq 1-\varepsilon$ presque sûrement pour n assez grand.

2] Convergence dans L^p

I.3 [Bale]

Définition 7: On dit que (X_n) converge vers X dans L^p si : $\lim_{+\infty}\|X_n-X\|_p=0$ ou si $\lim_{+\infty}\mathbb{E}[|X_n-X|^p]=0$. Noté $X_n\xrightarrow[+\infty]{L^p}X$.

Contrexemple 8: La convergence p.s. n'implique pas la convergence L^p. Pour (X_n) de loi $(1-\frac{1}{n^p})\delta_0+\frac{1}{n^p}\delta_n$, on a $X_n\xrightarrow[+\infty]{p.s.}0$ mais $\mathbb{E}[|X_n|^p]=1$

I.3 [Bale]

Théorème 9: (critère de Cauchy) Soit $(X_n)\in L^{p\,\mathbb{N}}$.
Alors : (X_n) converge dans L^p ssi (X_n) est de Cauchy dans L^p
i.e. $\lim_{m,n\to+\infty}\mathbb{E}[|X_n-X_m|^p]=0$

3] Convergence en probabilité

I.2 [Bale]

Définition 10: On dit que (X_n) converge en probabilité vers X si : $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$. Noté $X_n\xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}}X$.

Exemple 11: Si X_n sont non-corrélées telles que $\mathbb{E}[X_n]=0$ et $Var(X_n)=\sigma^2$, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}}0$

Exemple 12: Si (X_n) sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(1;p_n)$, alors : $X_n\xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}}0$ ssi $p_n\xrightarrow[+\infty]{}0$

Définition 13: On note $d(X;Y):=\mathbb{E}[\min\{|X-Y|;1\}]$

Lemme 14: $X_n\xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}}X$ ssi $\lim_{n\to+\infty}d(X_n;X)=0$

Remarque 15: $d(X;Y)=0$ ssi $X=Y$ p.s. Ainsi, d est une distance sur l'espace des variables aléatoires quotienté par la relation d'égalité presque partout

Théorème 16: (critère de Cauchy) Supposons que (X_n) vérifie : $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}\backslash\forall n\geq n_0$, $\mathbb{P}(|X_n-X_{n_0}|\geq\varepsilon)\leq\varepsilon$ ou $d(X_n;X_{n_0})\leq\varepsilon$
Alors : (X_n) converge en probabilité.

4] Convergence en loi

I.4 [Bale]

Définition 17: On dit que (X_n) converge en loi vers X si : $\forall\varphi\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[\varphi(X_n)]\xrightarrow[+\infty]{}\mathbb{E}[\varphi(X)]$. On note $X_n\xrightarrow[+\infty]{loi}X$

Théorème 18: (de Lévy) $X_n\xrightarrow{loi}X$ ssi $\forall t\in\mathbb{R}$, $\Phi_{X_n}(t)\xrightarrow[+\infty]{}\Phi_X(t)$.

Théorème 19: $X_n\xrightarrow{loi}X$ ssi en tout point de continuité t de F_X, $F_{X_n}(t)\xrightarrow[+\infty]{}F_X(t)$.

[Bale] I.4

Exemple 20: Pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X_n = (-1)^n X$, $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$.

Proposition 21: Si (X_n) et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$,
Alors : $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$ ssi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathbb{P}(X = k)$

II) Liens entre les différentes convergences

1) Implications directes

[Hauch]

Proposition 22: Si $X_n \xrightarrow[+\infty]{p.s.} X$, alors $X_n \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} X$

Contrexemple 23: La réciproque est fausse en général.
Pour $X_n \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{n})$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow[+\infty]{p.s.} 0$.

Proposition 24: Si $p<q$ et $X_n \xrightarrow[+\infty]{L^q} X$, alors $X_n \xrightarrow[+\infty]{L^p} X$.

Contrexemple 25: La réciproque est fausse en général
Pour $X_n(\omega) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } \omega \in]0;\frac{1}{n}[\\ 0 & \text{si } \omega \in [\frac{1}{n};1] \end{cases}$, $X_n \xrightarrow[+\infty]{L^1} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow[+\infty]{L^2} 0$.

Proposition 26: Si $X_n \xrightarrow[+\infty]{L^1} X$, alors $X_n \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} X$.

Contrexemple 27: La réciproque est fausse en général.
Pour $X_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } \omega \in]0;\frac{1}{n}[\\ 0 & \text{si } \omega \in [\frac{1}{n};1] \end{cases}$, $X_n \xrightarrow[+\infty]{p.s.} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow[+\infty]{L^1} 0$

Proposition 27: Si $X_n \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} X$, alors $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$.

Contrexemple 28: La réciproque est fausse en général.
Pour $X_n \sim \mathcal{B}(1;p)$, $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} X$ avec $X \sim \mathcal{B}(1;p)$ mais ce n'est pas vrai en probabilités.

2) Implications réciproques sous condition

[Bale] I.2

Proposition 29: Si $X_n \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} X$.
Alors : il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :
$X_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{p.s.} X$

I.3

Proposition 30: Si $X_n \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} X$ et $p>1$ tq : $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{\mathbb{E}[|X_n|^p]\}$
Alors : $\forall q<p$, $\lim_{+\infty} \|X_n - X\|_q = 0$

[Bale]

Définition 31: (X_n) est uniformément intégrable si :
$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \right\} = 0$$

Lemme 32: (X_n) est uniformément intégrable ssi on a :
(1) $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 \mid \forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\int_A |X_i| \, d\mathbb{P} \leq \varepsilon$
(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n| \, d\mathbb{P} < +\infty$ ou $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$

Proposition 33: Si $X_n \in L^1$
Alors : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et (X_n) uniformément intégrable ssi $X \in L^1$ et $X_n \xrightarrow[+\infty]{L^1} X$

I.4

Proposition 34: Si $X_n \xrightarrow[+\infty]{loi} c$, alors $X_n \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} c$.

III) Comportement asymptotique et applications

1) Loi faible, forte des grands nombres et TCL

I.5 [Bale]

Théorème 35: (loi faible des grands nombres) Soit (X_n) v.a. réelles, indépendantes de même loi que X telle que $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$.
Alors : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X]$

Proposition 36: Dans ce cas, si on plus $\mathbb{E}[|X|^4] < +\infty$
Alors : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[+\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X]$

Théorème 37: (loi forte des grands nombres) Soit (X_n) v.a. réelles, indépendantes de même loi que X.
Alors : $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ ssi $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[+\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X]$

Application 38: (méthode de Monte-Carlo) Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $I = [0;1]^d$, $A, B \in \mathbb{R}_+$, $f \in L^1(I)$ telle que $|f| \leq A$ p.p. et $\int_I f^2 \leq B$
Soit $(X_n) \sim \mathcal{U}(I)$ et $\left(e_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \int_I f\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
Alors : $e_n \xrightarrow{p.s.} 0$ et $\forall \varepsilon \in]0;\frac{B}{A}[$, $\mathbb{P}(|e_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{4B}\right)$

[V.5]

[Bole]

Théorème 39 : (central-limite) Soit (X_n) v.a. iid telles que $\mathbb{E}[X_0^2]<+\infty$ et on note $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$

Alors : $\dfrac{S_n - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n}} \xrightarrow[+\infty]{loi} X$ telle que $X\sim\mathcal{N}(0;Var(X))$

Application 40 : Pour $X_n\sim\mathcal{B}(1;p)$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$, on a :

$\forall a<b$, $\mathbb{P}\left(a\leq \dfrac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq b\right) \xrightarrow[+\infty]{} \int_a^b \dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt$

2) Quelques applications aux convergences

[Les]

Lemme 41 : Soit $(b_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n\xrightarrow[+\infty]{} b$ et $a\in[0;1[$

Alors : pour toute suite $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n+b_n$, (u_n) converge.

Théorème 42 : Soit $p\in]0;1[$, (ξ_n) v.a. de même loi $\xi_0\sim\mathcal{B}(1;p)$, (U_n) v.a. de même loi $U_0\sim\mathcal{U}([0;1])$ telles que toutes les v.a. introduites sont indépendantes.

Soit $X_0=x\in[0;1]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=U_nX_n+\xi_n(1-U_n)$

Alors : la suite (X_n) converge en loi vers une loi Bêta de paramètres p et $1-p$: $\beta(p;1-p)$.

[Ber]

Lemme 43 : Soit X v.a. réelle $\mathbb{P}$-p.s. bornée par 1, centrée.

Alors : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}[\exp(tX)]\leq\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$

Théorème 44 : (inégalité de Hoeffding) Soit (X_n) v.a. réelles, indépendantes, bornées p.s., centrées telles que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists c_n>0 \mid |X_n|\leq c_n$ et soit $S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j$.

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon)\leq 2\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$

Application 45 : Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} c_k^2\leq n^{2\alpha-\beta}$

Alors : $\dfrac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[+\infty]{p.s.} 0$

Références :

[Bale] Probabilité — Barbe
[Houch] Les contre-exemples en mathématiques — Hauchecorne
[Les] 131 développements pour l'oral — Lesesvre
[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques — Bernis