253

Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A \subseteq E$, $(H; \langle ; \rangle)$ un espace de Hilbert

I] Utilisation des parties convexes

1] Notion de partie convexe

[II.1] [Has]

Définition 1: On dit que A est convexe si $\forall x, y \in A, \forall t \in [0;1]$, $tx + (1-t)y \in A$

Exemple 2: (1) Soit F un sous-ev de E et $a \in E$. Alors: $a+F$ est un sous-ensemble convexe de E.
(2) Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Proposition 3: Soit $A, B \subseteq E$ convexes.
Alors: (1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_i)_{i=1}^n \in A^n$, $\forall (t_i)_{i=1}^n \in [0;1]^n$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n t_i x_i \in A$
(2) Si $0 \in A$, alors: $\forall t \in [0;1]$, $tA \subseteq A$
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, λA et $A+B$ sont convexes
(4) Une intersection de convexes est convexe.

Proposition 4: $\forall a \in E, \forall r > 0$, $B(a;r)$ est convexe

Proposition 5: Soit E, F deux $\mathbb{R}$-ev et $f : E \to F$ application.
Alors: f est affine ssi $\forall x, y \in E, \forall t \in [0;1]$, $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$

Proposition 6: Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f : E \to F$ application.
Alors: L'image par f (resp. l'image réciproque) d'un convexe de E (resp. de F) est un convexe de F (resp. de E).

Exemple 7: Soit $f \in \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le demi-espace: $H(f; \alpha) = \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ est un convexe.

Définition 8: Soit $C \subseteq E$ convexe. On dit que $x \in C$ est un point extrémal de C si: $\forall a, b \in C, \forall \lambda \in [0;1]$, si $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, alors $a = b$ ou $\lambda \in \{0;1\}$. On note $\mathcal{E}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C.

[Les]

Théorème 9: (de Krein-Milman) (admis) Tout convexe compact d'un espace affine de dimension finie est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

[Les]

Théorème 10: (de Choquet) Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie, $K \subseteq E$ convexe compact tel que $\mathcal{E}(K)$ est compact, soit $l : E \to \mathbb{R}$ linéaire, continue sur E.
Alors: l atteint un minimum sur K en un point extrémal de K.

Théorème 11: (de Birkhoff) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit l'ensemble: $\mathcal{B}_n := \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n([0;1]) \mid \forall i,j \in [\![1;n]\!], \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1\}$
Alors: les points extrémaux de $\mathcal{B}_n$ sont les matrices de permutations: $\mathcal{E}(\mathcal{B}_n) = P_\sigma$

2] Théorème de projection et conséquences

[II.2] [Li]

Théorème 12: (de projection) Soit $C \subseteq H$ fermé convexe non-vide
Alors: $\forall x \in H$, $\exists !\, p_C(x) \in C \mid \|x - y\| = d(x; C)$ caractérisé par: $p_C(x) \in C$ et $\mathrm{Re}\langle x - p_C(x); z - p_C(x)\rangle \leq 0$, $\forall z \in C$.

Corollaire 13: L'application $p_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne: $\forall x_1, x_2 \in H$, $\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$

Corollaire 14: Soit $F \subseteq H$ sous-ev fermé.
Alors: $p_F : H \to F$ est une application linéaire continue et $\forall x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique point de F tel que $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$
De plus, $H = F \oplus F^\perp$

Application 15: F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$

Exemple 16: $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

Application 17: (théorème de représentation de Riesz) Pour tout $\Phi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que: $\forall x \in H$, $\Phi(x) = \langle x \mid y \rangle$.

3] En analyse complexe

[II.4] [Tau]

Théorème 18: Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{C}$ telle que: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ pour tout triangle $\Delta \subseteq U$.
Alors: f possède une primitive sur U

VI.4 [Tau]

Lemme 19 : (de Goursat) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $w \in U$, et $f \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U \setminus \{w\})$.
Alors : pour tout triangle $\Delta \subseteq U$, $\int_{\partial \Delta} f(z)dz = 0$

Théorème 20 : (de Cauchy) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert convexe, $w \in U$, $f \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U \setminus \{w\})$.
Alors : f possède une primitive dans U et pour tout chemin fermé dans U, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Corollaire 21 : Soit γ chemin fermé dans $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert convexe, $z \in U \setminus Im(\gamma)$ et $f \in \mathcal{H}(U)$
Alors : $f(z)\, Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

VIII.1 [Rom]

II] Utilisation des fonctions convexes

1] Notion de fonction convexe

Soit par la suite $I \subseteq E$ convexe, $f : I \to \mathbb{R}$.

Définition 22 : On dit que f est convexe si : $\forall x,y \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]$, $f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Proposition 23 : f est convexe ssi $\mathcal{E}(f) := \{(x;y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ son épigraphe est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Exemples 24 : (1) $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$
(2) $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$
(3) Une combinaison linéaire à coefficients réels positifs de fonctions convexes est convexe
(4) La composée d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.

Contrexemples 25 : (1) Le produit de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe. $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes mais $x \mapsto x^3$ ne l'est pas.
(2) La composée de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe. Pour f convexe, $-id \circ f$ n'est pas nécessairement convexe.

VIII.2 [Rom]

2] Caractérisation des fonctions convexes

Théorème 26 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Alors : f est convexe ssi $\forall x,y \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Théorème 27 : f est convexe ssi $\forall x < y < z$, $p(x;y) \leq p(x;z) \leq p(y;z)$ avec $p(x;y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ ssi $\forall a \in I$, $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Application 28 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est affine ssi f est convexe et concave.

Application 29 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante ssi f est convexe et majorée.

Contrexemple 30 : f doit être défini sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est convexe, majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$ sans être constante

VIII.2 [Rom]

3] Régularité des fonctions convexes

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle non-vide, $f : I \to \mathbb{R}$.

Proposition 31 :
Alors : f est convexe sur I ssi f est continue et dérivable à droite sur I de dérivée f'_d à droite constante.

Proposition 32 : Une fonction convexe sur I est continue sur $\mathring{I}$.

Théorème 33 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I
Alors : f est strictement convexe ssi f' est strictement croissante ssi $f'' > 0$

III] Inégalités de convexité et utilisation en probabilités

VIII.3 [Rom]

1] En analyse réelle

Lemme 34 : (Inégalité de Young) Soit $u, v, p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tq : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Alors : $uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q$ ou $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$

Application 35 : (Inégalité de Jordan) $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) < x$

Application 36 : (Inégalité de Hölder) Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$, $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tq : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Alors : $\left|\sum_i^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_i^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_i^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

[Rom] VIII.3

Théorème 37 : (de Jensen) Soit $I \subseteq E$ convexe et $f : I \to \mathbb{R}$.
Alors : f convexe ssi pour toute combinaison linéaire convexe $\sum_i^p \lambda_i x_i$ de points de I, $f\left(\sum_i^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i^p \lambda_i f(x_i)$.

2) En probabilités

[Ber]

Lemme 38 : Soit X une v.a. réelle $\mathbb{P}$-presque sûrement bornée par 1 et centrée.
Alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$

Théorème 39 : (inégalité de Hoeffding) Soit (X_n) suite de v.a. réelles indépendantes, bornées presque sûrement, centrées tq : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists c_n > 0 \mid |X_n| \leq c_n$. Soit $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$

Application 40 : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ v.a. mutuellement indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}er(p)$ pour $p \in]0;1[$.
Alors : $\forall \alpha \in]0;1[$, $\left[\frac{1}{n} S_n - \sqrt{\frac{2}{n} \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)} ; \frac{1}{n} S_n + \sqrt{\frac{2}{n} \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right]$ est un intervalle de confiance par excès au niveau $1-\alpha$ du paramètre d'intérêt p.

Application 41 : Si de plus il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum^n c_k^2 \leq n^{2\alpha - \beta}$
Alors : $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} 0$

[NR]

Théorème 42 : (processus de Galton-Watson) Soit X v.a. discrète intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$, soit $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum^{+\infty} k p_k < +\infty$, soit $(X_{i,j})$ famille de v.a. indépendantes suivant la loi $\mathbb{P}_X$ et (Z_n) définie par $Z_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$, soit $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $\mathbb{P}_{ext} = \mathbb{P}(\{\exists n \in \mathbb{N} \mid Z_n = 0\})$
Alors : (1) Si $m > 1$, alors $\mathbb{P}_{ext}$ est l'unique point fixe de $G(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum^{+\infty} p_k s^k$ sur $]0;1[$

(2) Si $m \leq 1$, alors $\mathbb{P}_{ext} = 1$.

Références :

[Has] Topologie générale et espaces normés - Hassan

[Les] 131 développements pour l'agrégation - Lesesvre

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li

[Tau] Analyse complexe pour la licence 3 - Tauvel

[Rom] Éléments d'analyse réelle - Rombaldi

[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques - Bernis

[NR] No Reference !!