246

Séries de Fourier. Exemples et applications.

Soit $n, N \in \mathbb{N}$, $p \in [1;+\infty[$, $k \in \mathbb{N}^*$.

I] Coefficients et série de Fourier

1] Espaces de fonctions périodiques

[IV.I.2] [ZQ]

Définition 1: On note $\mathcal{E}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continues, 2π-périodiques.

Proposition 2: $(\mathcal{E}_{2\pi};\|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre de Banach

Définition 3: On note $c_0 := \{(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid \lim_{|n|\to+\infty}|u_n|=0\}$

Proposition 4: $(c_0;\|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre de Banach.

Définition 5: On note $L^p_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques, Lebesgue mesurables telles que $\|f\|_p<+\infty$ avec $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ pour $p\in[1;+\infty[$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-ev de $\mathcal{E}_{2\pi}$ engendré par les $(e_n : t\mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$

Exemple 6: $\cos = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_{-1} \in \mathcal{P}$.

2] Notion de coefficients de Fourier et de série de Fourier

[IV.I.2] [ZQ]

Définition 7: Soit $f\in L^1_{2\pi}$. Le n-ième coefficient de Fourier exponentiel de f est: $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$. Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont: $\left(a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\left(b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note $S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$ et $S(f) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$ la série de Fourier de f lorsque bien définie.

Exemple 8: $c_n(\mathbb{1}_{]\pi-a;\pi+a[}) = \begin{cases} \frac{\sin(an)}{n\pi} & \text{si } n\neq 0 \\ \frac{a}{\pi} & \text{si } n=0 \end{cases}$

Proposition 9: En posant $b_0(f)=0$, on a:

$c_n(f) = \frac{a_n(f) - i b_n(f)}{2}$ $\qquad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$

$c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + i b_n(f)}{2}$ $\qquad b_n(f) = i[c_n(f) - c_{-n}(f)]$

3] Propriétés et premiers résultats sur les coefficients

[IV.I.3] [ZQ]

Théorème 10: Soit $f\in L^1_{2\pi}$, $a\in\mathbb{R}$, $k,n\in\mathbb{Z}$, $g\in L^\infty_{2\pi}$.

Alors: (1) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ avec $\check{f} = f\circ -id$

(2) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

(3) $c_n(\tau_a f) = e^{ina}c_n(f)$

(4) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$

(5) $f * e_n = c_n(f)e_n$

(6) $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$

Proposition 11: Soit $f\in \mathcal{E}_{2\pi}\cap \mathcal{C}^1_m$.

Alors: $c_n(f') = in\,c_n(f)$

Proposition 12: Si de plus, $\sum_{n=-N}^{N}\alpha_n e_n$ converge uniformément vers f

Alors: $f\in\mathcal{E}_{2\pi}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n = c_n(f)$.

Lemme 13: (de Riemann-Lebesgue) Soit $f\in L^1([a;b])$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors: $\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = \lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$

Proposition 14: L'application $\gamma: \begin{array}{l} L^1_{2\pi} \to c_0 \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ est un morphisme d'algèbres linéaire de norme 1 tq: $\gamma(f*g)=\gamma(f)\gamma(g)$

Remarque 15: γ n'est pas surjectif

II] Convergence des séries de Fourier

1] Noyau de Dirichlet et de Féjer

[IV.II.2] [IV.II.3] [ZQ]

Définition 16: Le noyau de Dirichlet d'ordre N est: $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$

Proposition 17: D_N est pair, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1$ et $D_N(x) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin(\frac{x}{2})}$

Définition 18: Le noyau de Féjer d'ordre N est: $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$

Proposition 19: $K_N = \sum_{-N}^{N}(1-\frac{|n|}{N})e_n$; $K_N(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right]^2$; $\|K_N\|_1 = 1$

$0<\delta\leq\pi \Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} K_N(x)dx = 0$ et $\forall f\in L^1_{2\pi}$, $\forall N\geq 1$,

$\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{-N}^{N}(1-\frac{|n|}{N})c_n(f)e_n$ avec $\sigma_N(f) = \frac{S_0(f)+\dots+S_{N-1}(f)}{N}$

2] Premières difficultés de convergence et solution

IV.III.1

Contrexemple 20 : (admis) Il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que : $\sup_{N\in\mathbb{N}^*} |S_N(f)(0)| = +\infty$. En particulier, la suite des sommes de Fourier de f diverge en 0.

Théorème 21 : (de convergence de Féjer)
(1) Soit $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$. Alors : $\forall N\geq 1$, $\|\sigma_N(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$ et $\lim_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty = 0$
(2) Soit $f\in L^p_{2\pi}$ ($p\in[1;+\infty[$). Alors : $\forall N\ge1$, $\|\sigma_N(f)\|_p\le\|f\|_p$ et $\lim_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_p=0$

IV.III.2

Corollaires 22 : (1) $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$
(2) Soit $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$, $x_0\in\mathbb{R}$. Si $S_N(f)(x_0)\xrightarrow[N\to+\infty]{} l$, alors $l=f(x_0)$
(3) Soit $f\in\mathcal{C}_{2\pi}\cap\mathcal{C}^1_m$. Alors : f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $f=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$
(4) Soit $f,g\in\mathcal{C}_{2\pi}$. Alors : $\gamma(f)=\gamma(g)$ ssi $f=g$
Soit $f,g\in L^1_{2\pi}$. Alors $\gamma(f)=\gamma(g)$ ssi $f=g$ presque partout

[ZQ]

Application 23 : (théorème de Weierstrass) Toute fonction continue sur un intervalle compact est limite uniforme d'une suite de polynômes algébriques.

Théorème 24 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π-périodique, mesurable, intégrable sur $[0;2\pi]$ et $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f^+ := \lim_{t\to0^+} f(x_0+t)$ et $f^- := \lim_{t\to 0} f(x_0-t)$ existent et $\exists \delta>0$ $\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f^+|}{t}dt<+\infty$ et $\int_0^\delta \frac{|f(x_0-t)+f^-|}{t}dt<+\infty$
Alors : $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}[f^+ + f^-]$

Remarque 25 : En particulier, si $f\in\mathcal{C}_{2\pi}\cap\mathcal{C}^1_m$, alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=S(f)(x)$.

3] Cas des fonctions de carré intégrable

[ZQ]

Proposition 26 : $(L^2_{2\pi}, \langle;\rangle)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f;g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Proposition 27 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $L^2_{2\pi}$.
En particulier, si $f\in L^2_{2\pi}$, alors $\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=\|f\|_2^2$ (formule de Parseval) et $\lim_{N\to+\infty}\|S_N(f)-f\|_2=0$.

[ZQ]

Application 28 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $f(t)=\begin{cases} t & \text{si } 0\le t<\frac{\pi}{2}\\ \pi - t & \text{si } \frac{\pi}{2}\le t\le\pi\end{cases}$.
Alors : $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

III] Comparaison entre le comportement d'une fonction et celui de ses coefficients de Fourier et applications

1] Théorèmes de comparaison

IV.V.2. [ZQ]

Proposition 29 : $f\in L^2_{2\pi}$ ssi $\gamma(f)\in\ell^2$

Proposition 30 : (1) Soit $f\in\mathcal{C}^k_{2\pi}$. Alors $\lim_{|n|\to+\infty} n^k c_n(f)=0$
(2) Si $c_n = O(|n|^{-k})$, alors $f\in\mathcal{C}^{k-2}_{2\pi}$.

Corollaire 31 : $f\in\mathcal{C}^\infty_{2\pi}$ ssi $\gamma(f)\in\{(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} / \forall k\in\mathbb{N}^*, \lim_{|n|\to+\infty}|n^k a_n|=0\}$

Remarque 32 : Ces dernières propositions montrent que l'application γ échange régularité contre décroissance vers 0 en l'infini.

2] Utilisation des séries de Fourier pour calculer des intégrales et résoudre des EDP

[Les]

Proposition 33 : Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ convergent et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

[Isen]

Théorème 34 : (résolution de l'équation de la chaleur)
Soit $u_0\in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $d_n := c_n(f)$ ses coefficients de Fourier.
Alors : $\exists! u:\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in\mathcal{C}^\infty$ tel que :
(1) $\forall t>0$, $x\mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique
(2) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}$
(3) $\partial_t u=\Delta_x u$ sur $\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
(4) $u(t,\cdot)$ converge en norme L^2 lorsque $t\to0$.

Références:

[ZQ] Analyse pour l'agrégation - Zuily

[Les] 131 développements pour l'agrégation - Lesesvre

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann