# 245 Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert

## I] Des séries entières aux fonctions analytiques

### 1] Séries entières

III.1

**Définition 1 :** On appelle série entière toute série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto a_n z^n\end{array}$ avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

**Lemme 2 :** (d'Abel) Soit $\sum a_n z^n$ série entière, $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que $(a_n z_0^n)$ est bornée.
Alors : $\sum a_n z^n$ est normalement convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$

III.2

**Théorème/définition 3 :** Soit $\sum a_n z^n$ série entière.
Alors : il existe un unique $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ est absolument convergente
(ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ est divergente
On appelle rayon de convergence de la série un tel $R$.

[Tau]

**Exemple 4 :** Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est : $+\infty$.

**Corollaire 5 :** Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z_0 \in \mathbb{C}$
Alors : elle converge normalement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq : $|z| < |z_0|$.

III.3

**Corollaire 6 :** La somme d'une série entière est une fonction continue en tout point de son disque de convergence.

III.4

**Théorème 7 :** La somme d'une série entière est indéfiniment dérivable sur son disque de convergence et ses dérivées successives sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives :
$\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall z \in D(0;R)$, $S^{(p)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$

**Exemple 8 :** La fonction exponentielle $\exp : \begin{array}{l}\mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}\end{array}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$, admet pour dérivée $\exp$ elle-même. On peut également définir cos, sin, ch et sh à partir de leur développement en série entière.

### 2] Fonctions analytiques

IV.1

**Définition 9 :** Soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est analytique sur $U$ si $\forall z_0 \in U$, $\exists V \in \mathcal{V}_{z_0} \mid \forall z \in V$, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$

**Exemple 10 :** Pour $f : \begin{array}{l}D(0;1) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{1-z}\end{array}$, $f$ est analytique sur $D(0;1)$ puisque $\forall z \in D(0;1)$, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$.

[Tau]

**Notation 11 :** On note $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $U$.

**Remarque 12 :** $\mathbb{C}[X] \subseteq \mathcal{A}(U)$ et une fonction analytique sur $U$ est indéfiniment dérivable de dérivées analytiques.

**Théorème 13 :** Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de cv $R$.
Alors : sa somme $f$ est analytique sur $D(0;R)$.

IV.2

**Théorème 14 :** (de prolongement analytique) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe, $a \in U$ et $f \in \mathcal{A}(U)$
Alors : $f = 0$ sur $U$ ssi $\exists V \in \mathcal{V}_a \mid f_{|V} = 0$
ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$

**Corollaire 15 :** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe, $f, g \in \mathcal{A}(U)$ telles que $f$ et $g$ coïncident au voisinage d'un point de $U$.
Alors : $f = g$.

IV.3

**Théorème 16 :** (principe des zéros isolés) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe et $f \in \mathcal{A}(U) \setminus \{0\}$.
Alors : $Z(f) := \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ est une partie localement finie de $U$.

**Corollaire 17 :** Pour $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe, $\mathcal{A}(U)$ est un anneau intègre.

[FGNAn2]

**Application 18 :** Soit $(a_i)_{i=1}^{k} \in \mathbb{N}^{*k}$ premiers entre eux et soit $(u_n := \mathrm{card}(\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\}))_{n \in \mathbb{N}}$
Alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \times \dots \times a_k} \times \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

IV.exo1 [Tau]

**Exemple 19 :** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ contenant 0. Il n'existe pas de $f \in \mathcal{A}(U)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

# II] Fonctions holomorphes

## 1] Dérivabilité au sens complexe

**Définition 20:** Soit $z_0\in U$, $f:U\to\mathbb{C}$. On dit que $f$ est dérivable en $z_0$ si $\lim\limits_{\substack{z\in U\setminus\{z_0\}\\ z\to z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe. On note $f'(z_0)$ la dérivée de $f$ en $z_0$.
On dit que $f$ est holomorphe sur $U$ si elle est dérivable en tout point de $U$. On note $\mathcal{H}(U)$ leur ensemble.
À toute $f\in\mathcal{H}(U)$, on associe $f_{\mathbb{R}}: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x;y)\mapsto(Re(f(x+iy));Im(f(x+iy)))\end{array}$.

**Théorème 21:** Soit $f$ fonction définie au voisinage de $z_0=x_0+iy_0$.
Alors: $f$ est dérivable en $z_0$ ssi $f_\mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0;y_0)$ et $\frac{\partial f_\mathbb{R}}{\partial x}(x_0;y_0)+i\frac{\partial f_\mathbb{R}}{\partial y}(x_0;y_0)=0$

ssi $f_\mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0;y_0)$ et $d_{(x_0;y_0)}f_\mathbb{R}\in\mathbb{C}\,dz$

Sous ces conditions, $f'(z_0)=\frac{\partial f_\mathbb{R}}{\partial x}(x_0;y_0)=-i\frac{\partial f_\mathbb{R}}{\partial y}(x_0;y_0)$

**Remarque 22:** En notant $P(x;y)=Re(f(x+iy))$ et $Q(x;y)=Im(f(x+iy))$ on a les conditions de Cauchy-Riemann: $\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}\\ \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}\end{cases}$

**Exemple 23:** $id_\mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ mais $z\mapsto\bar{z}$ n'est pas holomorphe bien que $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$.
Toute fonction analytique est holomorphe.

## 2] Intégrale curviligne

**Définition 24:** Soit $a<b\in\mathbb{R}$. On appelle chemin toute application $\gamma:[a;b]\to U$ de classe $\mathcal{C}^1_{pm}$. Si $\gamma(a)=\gamma(b)$, alors $\gamma$ est fermé.

**Exemple 25:** $\forall z_0\in\mathbb{C}, \forall r>0$, $\gamma: \begin{array}{l}[0;2\pi]\to\mathbb{C}\\ t\mapsto z_0+re^{it}\end{array}$ est un chemin fermé.

**Définition 26:** Soit $\gamma:[a;b]\to U$ chemin et $f:Im(\gamma)\to\mathbb{C}$ continue.
On appelle intégrale de $f$ sur $\gamma$: $\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

**Exemple 27:** En reprenant les notations de l'exemple 25, $\int_\gamma f(z)dz = ir\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{it}dt$

**Définition/théorème 28:** Soit $\gamma:[a;b]\to\mathbb{C}$ chemin fermé, $U=\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$ et $Ind_\gamma: \begin{array}{l}U\to\mathbb{C}\\ z\mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi-z}\end{array}=\frac{1}{2i\pi}\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt$
Alors: $Ind_\gamma$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe bornée de $U$ et nulle sur la composante connexe non-bornée de $U$. On dit que $Ind_\gamma(z)$ est l'indice de $z$ par rapport à $\gamma$.

**Remarque 29:** $Ind_\gamma(z)$ représente le nombre de tours signés que réalise $\gamma$ autour de $z$.

**Exemple 30:** Si $Im(\gamma)=\mathcal{C}(0;r)$, alors $Ind_\gamma(D(0;r))=1$ et $Ind_\gamma(\mathbb{C}\setminus\overline{D(0;r)})=0$.

## 3] Théorème de Cauchy et conséquences

**Théorème 31:** Soit $f:U\to\mathbb{C}$ continue.
Alors: $f$ possède une primitive sur $U$ ssi $\forall\gamma$ chemin fermé dans $U$, $\int_\gamma f(z)dz=0$

**Théorème 32:** (de Goursat) Soit $w\in U$, $f\in\mathcal{C}(U)\cap\mathcal{H}(U\setminus\{w\})$.
Alors: pour tout triangle $\Delta\subseteq U$, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz=0$

**Théorème 33:** (de Cauchy pour un convexe) Soit $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert convexe, $w\in U$ et $f\in\mathcal{C}(U)\cap\mathcal{H}(U\setminus\{w\})$
Alors: $f$ possède une primitive dans $U$ et pour tout chemin fermé $\gamma$ dans $U$, on a: $\int_\gamma f(z)dz=0$

**Corollaire 34:** (formule de Cauchy pour un convexe) Soit $\gamma$ chemin fermé dans $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert convexe, $z\in U\setminus Im(\gamma)$ et $f\in\mathcal{H}(U)$.
Alors: $f(z)Ind_\gamma(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$

**Application 35:** Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ convergent et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

# III] Analyticité des fonctions holomorphes et méromorphie

## 1] Analyticité des fonctions holomorphes

[Tau] VI.5

**Théorème 36**: Soit $a\in U$, $f\in\mathcal{H}(U)$.

**Alors**: $f\in\mathcal{A}(U)$ et si de plus $U$ est convexe, alors pour tout $\gamma$ chemin fermé dans $U$ tel que $a\notin \mathrm{Im}(\gamma)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a)=\frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$

**Corollaire 37**: (Théorème de Morera) Soit $f\in\mathcal{C}(U)$.

**Alors**: $f\in\mathcal{H}(U)$ ssi $f\in\mathcal{A}(U)$ ssi pour tout triangle $\Delta\subseteq U$, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz=0$

**Remarque 38**: On a alors que toute fonction holomorphe est indéfiniment dérivable.

## 2] Inégalité de Cauchy et conséquences

[Tau] VII.1

**Théorème 39**: (Inégalité de Cauchy) Soit $f\in\mathcal{H}(D(0,R))$, $f=\sum a_n z^n$.

**Alors**: $\forall r\in]0,R[$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)|\le \frac{\sup\{|f(z)| \mid |z|=r\}}{r^n}$

**Corollaire 40**: (Théorème de Liouville) Soit $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ bornée.

**Alors**: $f$ est constante

**Application 41**: (Théorème de D'Alembert-Gauss) Tout polynôme d'une variable à coefficients complexes non-constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

[Tau] VII.5

**Théorème 42**: (d'holomorphie sous l'intégrale) Soit $f: U\times X\to\mathbb{C}$ tq:

(i) $\forall z\in U$, $x\mapsto f(z,x)$ est $L^1$ sur $X$

(ii) $\forall x\in X$, $z\mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur $U$

(iii) $\forall K\subseteq U$ compact, $\exists g\in L^1 \mid \forall (z,x)\in U\times X$, $|f(z,x)|\le g(x)$

**Alors**: $F: \begin{array}{l} U \to \mathbb{C} \\ z\mapsto \int_X f(z,x)dx \end{array} \in\mathcal{H}(U)$ et $\forall z\in U$, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z)=\int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)dx$$

[OA] III.1.5

**Application 43**: Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $\rho: I\to\mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_I |x|^n\rho(x)dx<+\infty$ et $\exists a>0 \mid \int_I e^{a|x|}\rho(x)dx<+\infty$

**Alors**: la famille $(P_n)$ des polynômes obtenus par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt forme une base hilbertienne de l'espace $L^2(I,\rho):=\{f:I\to\mathbb{C} \mid \int_I |f(x)|^2\rho(x)dx<+\infty\}$ muni du produit scalaire $\langle f;g\rangle_\rho := \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$.

## 3] Méromorphie et théorème des résidus

[Tau] VIII.2

**Définition/Théorème 43**: Soit $a\in U$, $f\in\mathcal{H}(U\setminus\{a\})$.

**Alors**: $f$ vérifie une et une seule des propriétés suivantes:

(1) $f$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $a$. On dit que $f$ a une singularité illusoire en $a$

(2) $\exists (a_{-1},\dots,a_{-m})\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \mid z\mapsto f(z)-\sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$ a une singularité illusoire en $a$. On dit que $a$ est un pôle d'ordre $m$ de $f$. On appelle résidu de $f$ en $a$: $\mathrm{Res}(f,a):=a_{-1}$

(3) $\forall r>0$, $D(a,r)\subseteq U \Rightarrow f(D(a,r)\setminus\{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit que $a$ est une singularité essentielle de $f$

**Exemple 44**: $f: \begin{array}{l}\mathbb{C}^*\to\mathbb{C} \\ z\mapsto e^{\frac{1}{z}}\end{array}$ a $0$ pour singularité essentielle

VIII.3

**Définition 45**: Une fonction $f:U\to\mathbb{C}$ est dite méromorphe s'il existe $A\subseteq U$ localement finie telle que $f\in\mathcal{H}(U\setminus A)$ et telle que tous les points de $A$ sont des pôles de $f$. On note $\mathcal{M}(U)$ leur ensemble.

VIII.4

**Théorème 46**: (des résidus) Soit $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert convexe, $a_1,\dots,a_n\in U$ points deux à deux distincts et $f\in\mathcal{H}(U\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$ telle que les $a_i$ sont des pôles de $f$. Soit $\gamma$ chemin fermé dans $U$ tq: $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $a_i\notin \mathrm{Im}(\gamma)$

**Alors**: $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f,a_k)$

**Exemple 47**: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}dx=\frac{\pi}{n\sin(\frac{\pi}{n})}$

Références :

[Tau] Analyse complexe pour la licence 3 - Tauvel

[FGNAn2] Exercices de mathématiques oraux X-ENS Analyse 2 - Francinou

[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesure

[OA] Objectif Agrégation - Beck