239 Fonctions définies par une intégrale à paramètre. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(X;\mathcal{A};\mu)$ espace mesuré, $(E;d)$ espace métrique

I] Théorèmes de régularité

1] Continuité sous le signe intégrale

VIII.1 [Bri]

Théorème 1: (de convergence dominée) Soit $(f_n)\in L^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ telle que: $f_n\to f$ μ-p.p. et il existe $g\in L^1(\mu)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\le g$ μ-p.p.

Alors: $f\in L^1(\mu)$ et $\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|\,d\mu=0$. En particulier, on a:

$$\lim\int_X f_n\,d\mu=\int_X \lim f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu$$

VIII.3 [Bri]

Théorème 2: (de continuité sous le signe intégrale) Soit $f: E\times X\to\mathbb{K}$

(i) $\forall u\in E$, $x\mapsto f(u;x)$ est mesurable sur X

(ii) $\forall$ μ-p.t. $x\in X$, $u\mapsto f(u;x)$ est continue sur X

(iii) $\exists g\in L^1(\mu)\,|\,\forall u\in E$, $\forall$ μ-p.t. $x\in X$, $|f(u;x)|\le g(x)$

Alors: $F: \begin{array}{l} E\to\mathbb{K}\\ u\mapsto\int_X f(u;x)\,dx\end{array}$ est continue sur E.

Application 3: Pour $X=\mathbb{N}$; $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, m la mesure de comptage, si $(f_n)\in\mathcal{C}(E)^{\mathbb{N}}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty<+\infty$, alors $u\mapsto\sum f_n(u)$ est continue sur E

2] Dérivabilité sous le signe intégrale

VIII.3 [Bri]

Théorème 4: (de dérivabilité sous le signe intégrale) Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle non-vide, $f: I\times X\to\mathbb{K}$ telle que:

(i) $\forall u\in I$, $x\mapsto f(u;x)\in L^1(\mu)$

(ii) $\forall$ μ-p.t. $x\in X$, $u\mapsto f(u;x)\in\mathcal{C}^1(I)$

(iii) $\exists g\in L^1(\mu)\,|\,\forall u\in I$, $\forall$ μ-p.t. $x\in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u;x)\right|\le g(x)$

Alors: $F: \begin{array}{l} I\to\mathbb{K}\\ u\mapsto\int_X f(u;x)\,dx\end{array}\in\mathcal{C}^1(I)$ et $F': \begin{array}{l} I\to\mathbb{K}\\ u\mapsto\int_X\frac{\partial f}{\partial u}(u;x)\,dx\end{array}$.

VIII.3 [Bri]

Application 5: Pour $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, m la mesure de comptage, soit $(f_n)\in\mathcal{C}^1(I)$ telle que: $\forall u\in I$, $\sum|f_n(u)|+\|f_n'\|_\infty<+\infty$

Alors: $u\mapsto\sum f_n(u)\in\mathcal{C}^1(I)$ de dérivée $u\mapsto\sum f_n'(u)$.

Exemple 6: Soit $F: \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\int_0^1\sqrt{\varphi(x)^2+t}\,dx\end{array}$ avec $\varphi\in\mathcal{C}^1([0;1])$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée: $F': \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\int_0^1\frac{dx}{2\sqrt{\varphi(x)^2+t}}\end{array}$.

3] Holomorphie sous le signe intégrale

VIII.3 [Bri]

Théorème 7: (d'holomorphie sous le signe intégrale) Soit $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert, $f: U\times X\to\mathbb{C}$ telle que:

(i) $\forall z\in U$, $x\mapsto f(z;x)$ est μ-intégrable sur X

(ii) $\forall x\in X$, $u\mapsto f(z;x)$ est holomorphe sur U

(iii) $\forall K\subseteq U$ compact, $\exists g\in L^1(\mu)\,|\,\forall(z;x)\in U\times X$, $|f(z;x)|\le g(x)$

Alors: $F: \begin{array}{l}U\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\int_X f(z;x)\,d\mu(x)\end{array}\in\mathcal{H}(U)$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z\in U$, on a:

$$F^{(n)}(z)=\int_X\frac{\partial^n}{\partial z^n}f(z;x)\,d\mu(x)$$

Application 8: L'application $\Gamma: \begin{array}{l}\{z\in\mathbb{C}\,|\,Re(z)>0\}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}\,dt\end{array}$ se prolonge à $\mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}$ et $\Gamma': \begin{array}{l}\mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}\ln(t)\,dt\end{array}$.

III.1.5 [OA]

Définition 9: Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle. On appelle fonction poids toute fonction $\rho: I\to\mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_I|x|^n\rho(x)\,dx<+\infty$. On note $L^2(I;\rho)$ l'espace: $L^2(I;\rho):=\{f:I\to\mathbb{K}\,|\,f$ mesurable et $\int_I|f(x)|^2\rho(x)\,dx\}$ muni du produit scalaire: $\langle f;g\rangle_\rho:=\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$.

Application 10: Soit $I\subseteq\mathbb{R}$, $\rho: I\to\mathbb{R}$ fonction poids sur I telle que: $\exists a>0\,|\,\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx<+\infty$.

Alors: la famille (P_n) issue du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I;\rho)$.

[OA] III.1.5

Contrexemple 11: L'hypothèse sur ρ est vitale.
Pour $I = \mathbb{R}_+$, $w(x) = x^{-\ln(x)}$ la famille des polynômes orthogonaux pour w ne forme pas une base hilbertienne pour $L^2(\mathbb{R}_+ ; w)$.

II] Produit de convolution

1] Notion de convolution et premiers résultats

[Bri] XIV.2

Définition 12: Soit $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ boréliennes. La convolée de f et g est: $f*g : \begin{array}{l}\mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy\end{array}$

Théorème 13: (1) Si $f \in L^1_{loc}(\lambda)$, $g \in L^\infty(\lambda)$ à support compact, alors: $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$
(2) Soit $f \in L^p(\lambda)$, $g \in L^q(\lambda)$, $p,q \in [1;+\infty[$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors $f*g$ est uniformément bornée et continue sur $\mathbb{R}$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$
(3) Soit $f,g \in L^1(\lambda)$, alors $f*g \in L^1(\lambda)$, $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ et $\int_{\mathbb{R}^d} f*g\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\lambda * \int_{\mathbb{R}^d} g\,d\lambda$
(4) $(L^1(\lambda);+;\cdot)$ muni de $*$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative ne possédant pas d'unité.
(5) Si $f \in L^p(\lambda)$, $g \in L^1(\lambda)$, alors $f*g \in L^p(\lambda)$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$

Exemples 14: (1) $f*0 = 0$
(2) $f*\mathbb{1} = \int_{\mathbb{R}^d} f\,dx$
(3) $\mathbb{1}_{[0;1]} * \mathbb{1}_{[0;1]}(x) = [\min(x;1) - \max(x-1;0)]\,\mathbb{1}_{[0;2]}(x)$

2] Approximation de l'unité et suite régularisante

[Bri] XIV.4

Définition 15: On dit que $(\alpha_n) \in L^1(\lambda)^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} \alpha_n\,dx = 1$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n|\,dx < +\infty$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} |\alpha_n|\,dx = 0$.

Exemple 16: Pour $\alpha \in L^1(\lambda)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \alpha\,d\lambda = 1$, la suite: $\left(\alpha_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n\alpha(nx)\end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Théorème 17: Soit $(\alpha_n) \in L^1(\lambda)^{\mathbb{N}}$ approximation de l'unité, $p \in [1;+\infty[$ et $f \in L^p(\lambda)$.
Alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f*\alpha_n \in L^p(\lambda)$ et $f*\alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

Exemples 18: (1) Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$: $\left(\alpha_n(x) = \frac{1}{2n} e^{-\frac{|x|}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
(2) Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$: $\left(\alpha_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2+x^2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
(3) Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^d$: $\left(\alpha_n(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}n)^d} e^{-\frac{|x|^2}{2n^2}}\right)$

Définition 19: Une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite régularisante si: (α_n) est une approximation de l'unité et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 20: Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, on définit $\alpha := \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,d\lambda}$ et la suite $(\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

Théorème 21: $\forall p \in [1;+\infty[$, $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d;\mathbb{K})$ est dense dans $L^p(\lambda_d)$

III] Transformation de Fourier et séries de Fourier

1] Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

[Li] X.5

Définition 22: On appelle espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$:
$S(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid \forall k,n \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| < +\infty\}$

Remarque 23: $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$

Exemple 24: Pour $a > 0$, $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-ax^2}\end{array}$ est dans $S(\mathbb{R})$ mais pas $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})$.

Définition 25: La transformée de Fourier sur $S(\mathbb{R})$ est:
$\mathcal{F} : \begin{array}{l}S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left[\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\,dx\right]\end{array}$

Théorème 26: (d'inversion de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$
Alors: $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f \circ (-\mathrm{id})$

[Isen]

Théorème 27 : L'application $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est surjective.

Application 28 : $\forall f \in S(\mathbb{R}),\ \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

Théorème 29 : (de Riesz-Fischer) $\forall p \in [1;+\infty[$, l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est complet

Théorème 30 : (de prolongement des applications uniformément continues) Soit E, F espaces métriques, avec F complet, $A \subset E$ dense dans E, $f : A \to F$ uniformément continue.
Alors : $\exists! g : E \to F$ uniformément continue prolongeant f à E.

Théorème 31 : (de Plancherel) Soit $\mathcal{P} : \begin{array}{l} S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{array}$
Alors : $\mathcal{P}$ est bien définie et il existe un unique prolongement isomorphique, isométrique de $\mathcal{P}$ à $L^2(\mathbb{R})$.

2] Coefficients de Fourier et séries de Fourier

VI

Définition 32 : Soit $f \in \mathcal{C}_m$, 2π-périodique. On appelle coefficients de Fourier exponentiels $(c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt)_{n\in\mathbb{Z}}$ coefficients de Fourier trigonométriques $(a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ $(b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On appelle série de Fourier de f :
$S(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)$

[ElAm]

Théorème 33 : (de Parseval) Soit $f \in \mathcal{C}_m$, 2π-périodique.
Alors : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4}|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$

Lemme 34 : (de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in \mathcal{C}_m([a;b])$.
Alors : $\lim_{|x|\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}dt = \lim_{|x|\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(xt)dt = 0$

Théorème 35 : (de Dirichlet) Soit $f \in \mathcal{C}^1_m$, 2π-périodique.
Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = S(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$

3] Quelques applications des séries de Fourier

[ies]

Application 36 : Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ convergent et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

[Isen]

Application 37 : (résolution de l'équation de la chaleur)
Soit $u_0 \in L^2([0;2\pi])$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n := c_n(u_0)$ ses coeffs de Fourier.
Alors : $\exists! u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty$ telle que :
(1) $\forall t > 0$, $x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique
(2) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
(3) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
(4) $u(t;\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{\|\cdot\|_2} u_0$

Références :

[Bri] Analyse Théorie de l'intégration - Briane

[OA] Objectif Agrégation - Beck

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

[ElAm] Suites et séries numériques/de fonctions - El Amrani

[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre