236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ et $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}^*$,

I] Méthodes directes

1) Par une primitive

[GouAn] III.2

Définition 1: Soit $f \in \mathcal{C}^1([a;b])$. On dit que F est une primitive de f si: $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$.

Remarque 2: Il n'y a pas unicité d'une primitive: prendre $F(t) = \int_a^t f(s)ds + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 3: Des primitives de $\tan(x)$; $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ et $\frac{1}{a^2+x^2}$ sont $-\ln|\cos(x)|$; $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ et $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ respectivement.

Application 4: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$.

Proposition 5: $\int \frac{dx}{(x-a)^h} = \begin{cases} \frac{1}{(1-h)(x-a)^{h-1}}+k & \text{si } h\neq 1 \\ \ln|x-a|+k & \text{si } h=1 \end{cases}$

Proposition 6: $\int \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^h}dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{(1-h)[(x-p)^2+q^2]^{h-1}}+k & \text{si } h\neq 1 \\ \alpha\ln[(x-p)^2+q^2]+k & \text{si } h=1 \end{cases}$

Corollaire 7: Pour calculer $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}dx$, on décompose: $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h} = \frac{2\alpha(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^h} + \frac{\beta}{[(x-p)^2+q^2]^h}$.

Théorème 8: L'intégrale d'une fonction rationnelle f s'obtient en décomposant f en éléments simples. Par linéarité de l'intégrale, on est ramené à calculer des primitives de la forme: $\int \frac{dx}{(x-a)^h}$ et $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}dx$.

Exemple 9: $\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]+k$

2) Par intégration par parties

[Bri] I.5

Théorème 10: (d'intégration par parties) Soit $f,g \in \mathcal{C}^1([a;b])$. Alors: $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$

Exemple 11: $\int_0^x \arctan(u)du = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

[Bri] XI.3

Théorème 12: (d'intégration par parties sur $\mathbb{R}$) Soit $f,g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors: $\int_0^x f(t)G(t)dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)dt$ avec $\begin{cases} F(x) := \int_0^x f(t)dt \\ G(x) := \int_0^x g(t)dt \end{cases}$

Exemple 13: Soit $\left(I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut montrer que: $I_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\dots\times 1}{2p(2p-2)\times\dots\times 2}$; $I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\times\dots\times 2}{(2p+1)(2p-1)\times\dots\times 1}$; $\pi = \lim \frac{1}{p}\left[\frac{I_{2p+1}}{2p+1}\right]^2$ et $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

3) Par changement de variables

[GouAn] III.1

Théorème 14: (de changement de variables) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a;b])$, $f: I\subseteq\mathbb{R} \to E \in \mathcal{C}_m(I)$ telle que $\varphi([a;b]) \subseteq I$. Alors: $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

Application 15: Soit $f \in \mathcal{C}_m([-a;a])$. Alors: (1) Si f est paire, alors: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
(2) Si f est impaire, alors: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Application 16: Soit $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R})$, T-périodique. Alors: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

[Bri]

Théorème 17: (de changement de variables multidimensionnel) Soit $\varphi: \Delta \to D$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts $\Delta, D \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors: $\forall f: D \to \mathbb{K}$, f est intégrable ssi $(f\circ\varphi)|J_\varphi|$ est intégrable et $\int_D f(x)dx = \int_\Delta f(\varphi(u))|J_\varphi|(u)du$

[GouAn] IV.4

Application 18: $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x;y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} rf(r\cos(\theta);r\sin(\theta))drd\theta$

Exemple 19: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

II] Méthodes indirectes par la théorie de la mesure et par l'analyse complexe

1) Interversion d'intégrales

[XI.3] [Bri]

Théorème 20 : (de Fubini-Tonelli) Soit $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable, μ et ν deux mesures σ-finies sur X et Y respectivement.
Alors : $x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(dy)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\mu(dx)$ sont mesurables
et $\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$

Application 21 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$
Alors : $\forall a>0$, $\int_0^{+\infty} \frac{F(ax)-F(x)}{x}\,dx = \ln(a)\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

Théorème 22 : (de Fubini) Soit $f : X\times Y \to \mathbb{K} \in L^1$ et μ, ν deux mesures σ-finies sur X et Y respectivement :
Alors : (1) Pour presque tout x, y, $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \in L^1$, $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \in L^1$
(2) $\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$

Contrexemple 23 : L'hypothèse $f \in L^1$ est vitale.
Soit $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. f vérifie $\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\,dx = 0$ mais :
$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ d'où $\int_X\left(\int_Y f\right) \neq \int_Y\left(\int_X f\right)$

2) Interversion limite-intégrale

[VIII.1] [Bri]

Théorème 24 : (de convergence monotone) Soit $(f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurables telles que (f_n) est croissante.
Alors : $\lim f_n$ est mesurable et $\int_X \lim f_n = \lim \int_X f_n$

Lemme 25 : (de Fatou) Soit $(f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurables.
Alors : $0 \le \int_X \liminf(f_n) \le \liminf\left(\int_X f_n\right) \le +\infty$

Théorème 26 : (de convergence dominée) Soit $(f_n) \in L^1$ telle que : $f_n \xrightarrow[+\infty]{} f$ et $\exists g \in L^1 \setminus \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \le g$
Alors : $\lim \int_X f_n = \int_X f$ et $\lim \int_X |f_n - f| = 0$

Application 27 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\left(I_n(\alpha) := \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors : $\lim I_n(\alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \le 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$

Théorème 28 : Soit $(\varphi_n : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$ mesurables.
Alors : $\int_X\left(\sum_{n\ge1}\varphi_n\right) = \sum_{n\ge1}\int_X \varphi_n$

Exemple 29 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+1}$

3) Par l'analyse complexe

[VI.4] [VIII.4] [Tau]

Théorème 30 : (de Cauchy) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert convexe, $w \in U$ et $f \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U\setminus\{w\})$
Alors : f possède une primitive dans U et pour tout chemin fermé γ dans U, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Définition 31 : Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $f \in \mathcal{M}(U)$, a pôle d'ordre m de f. Le résidu de f en a est : $Res(f,a) := \alpha_{-1}$ avec $P(z) = \sum_{k=1}^m \alpha_{-k}(z-a)^{-k}$ la partie principale de f en a.
Soit γ chemin fermé sur U, $z \in U$. L'indice de f en z est :
$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$.

Remarque 32 : (1) En pratique pour calculer $Res(f,a)$, on écrit $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ et alors : • si $m=1$, alors $Res(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$
• si $m>1$, alors $Res(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}$
(2) L'indice de f en z compte le nombre de tours parcourus par le chemin γ autour de z, signé.

Théorème 33 : (des résidus) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, convexe, $a_1, \dots, a_n \in U$, $f \in \mathcal{H}(U\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$ tq : a_i sont pôles de f. Soit γ chemin fermé dans U tq : $a_i \notin Im(\gamma)$
Alors : $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n Ind_\gamma(a_k)\,Res(f,a_k)$

Application 34 : Soit $I = \int_0^{2\pi} R(\sin(t), \cos(t))\,dt$ avec R fraction rationnelle sans pôle sur $\partial D(0,1)$. Alors : $I = 2\pi \sum Res\left[R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\right]$
la somme portant sur les pôles de $D(0,1)$

[Les]

Application 35 : Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt$ et $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt$ convergent et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

III] Calcul d'intégrales par les séries de Fourier

1] Notion de série de Fourier

[VI.3]

Définition 36 : Soit $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R})$, 2π-périodique. On appelle coefficients de Fourier exponentiels : $\left(c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ coefficients de Fourier trigonométriques : $\left(a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\left(b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On appelle série de Fourier de f :

$$S(f) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right]$$

[El Am]

Théorème 37 : (formule de Parseval) Soit $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R})$, 2π-périodique.
Alors : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right]$

Lemme 38 : (de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b])$.
Alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{itx}\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_a^b f(t)e^{itx} = 0$

Théorème 39 : (de Dirichet) Soit $f \in \mathcal{C}^1_m(\mathbb{R};\mathbb{C})$, 2π-périodique.
Alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = S(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$

2] Pour le calcul d'intégrales à une variable

[VI. exos]

Exemple 40 : Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \text{si } \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases}$
Alors : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

[El Am]

Exemple 41 : Soit $a \in]0;+\infty[$ et $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ t\mapsto \frac{1}{ch(a)+\cos(t)}\end{array}$.
Alors : $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{ch(a)+\cos(t)}\,dt = \frac{(-1)^n\pi e^{-na}}{sh(a)}$

[Les]

Application 42 : Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt$ et $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt$ convergent et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3] Pour le calcul d'intégrales à plusieurs variables

[Isen]

Proposition 43 : (résolution de l'équation de la chaleur)
Soit $u_0 \in L^2([0;2\pi])$ et $\forall n\in\mathbb{Z}$, $d_n := c_n(f)$ ses coefficients de Fourier
Alors : $\exists!\, u : \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty$ tel que :
(1) $\forall t>0$, $x\mapsto u(t;x)$ est 2π-périodique
(2) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définis et continus sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$
(3) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
(4) $x\mapsto u(t;x)$ converge en norme L^2 vers u_0 lorsque $t\to 0$.

Références :

[GouAn] Les Maths en tête Analyse - Gourdon

[Bri] Analyse théorie de l'intégration - Briane

[Tau] Analyse complexe pour la licence 3 - Tauvel

[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre

[ElAm] Suites et séries numériques / de fonctions - El Amrani

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann