229

Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I] Fonctions monotones

1] Notion de fonction monotone

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$.

Définition 1 : On dit que f est croissante (resp. décroissante) si $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$). On dit que f est monotone si elle est croissante ou décroissante. Si les inégalités sont strictes, alors on parle de monotonie stricte.

Exemple 2 : $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Notation 3 : On note $\mathcal{M}(D)$ l'ensemble des fonctions monotones sur D, $\mathcal{M}^+(D)$ celui des fonctions croissantes et $\mathcal{M}^-(D)$ celui des fonctions décroissantes.

Proposition 4 : (1) Si $f \in \mathcal{M}_+(D)$ (resp. $f \in \mathcal{M}_-(D)$) alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda f \in \mathcal{M}_+(D)$ (resp. $\lambda f \in \mathcal{M}_-(D)$)

(2) Si $f, g \in \mathcal{M}_+(D)$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}_-(D)$), alors $f + g \in \mathcal{M}_+(D)$ (resp. $f+g \in \mathcal{M}_-(D)$)

(3) Si $f, g \in \mathcal{M}_+(D)$ et $f, g \geq 0$, alors $fg \in \mathcal{M}_+(D)$.

(4) Si $f, g \in \mathcal{M}_+(D)$ ou $f, g \in \mathcal{M}_-(D)$, alors $f \circ g \in \mathcal{M}_+(D)$

(5) Si $f \in \mathcal{M}_+(D)$ et $f > 0$, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}_-(D)$.

Contrexemple 5 : Dans (3), l'hypothèse $f, g \geq 0$ est vitale. $x \mapsto x \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R})$ mais $x \mapsto x^2 \notin \mathcal{M}_+(\mathbb{R})$

Remarque 6 : $\mathcal{M}(D)$, $\mathcal{M}_+(D)$ et $\mathcal{M}_-(D)$ sont des cônes. En particulier, ce ne sont pas des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Proposition 7 : Soit $f \in \mathcal{M}(D)$

Alors : f est injective ssi f est strictement monotone

Exemple 8 : La fonction sinus est une bijection croissante de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1;1]$ d'inverse arcsinus strictement croissante de $[-1;1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

[RDO]

2] Régularité des fonctions monotones

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

Théorème 9 : (de la limite monotone) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ monotone, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que : a est adhérent à $D \cap]a; +\infty[$

Alors : f admet une limite à droite en a

Proposition 10 : L'ensemble des points de discontinuité de f est, au plus, dénombrable.

Proposition 11 : (continuité d'une fonction monotone) Si de plus f est monotone i.e. $f \in \mathcal{M}(I)$.

Alors : f est continue sur I ssi $f(I)$ est un intervalle

Proposition 12 : Si de plus $f \in \mathcal{C}(I)$ et dérivable à droite sur $\mathring{I}$.

Alors : (1) f est constante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) = 0$

(2) f est croissante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) \geq 0$

(3) f est décroissante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) \leq 0$

(4) f est strictement croissante ssi $f'_d \geq 0$ et l'ensemble $\{t \in \mathring{I} \mid f'_d(t) = 0\}$ est d'intérieur vide.

(5) f est strictement décroissante ssi $f'_d \leq 0$ et l'ensemble $\{t \in \mathring{I} \mid f'_d(t) = 0\}$ est d'intérieur vide.

Exemple 13 : $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante car $\{0\}$ est d'intérieur vide.

[RDO]

3] Théorèmes de Dini

Définition 14 : On dit que $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ (resp. uniformément) si :

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(resp. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall x, y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Remarque 15 : La convergence uniforme implique la convergence simple.

[IV.3. exo 5 [GouAn]]

[GouAn] IV.3.exo 5

Contrexemple 16 : Soit $\left(f_n : \begin{array}{l}[0;1]\to[0;1]\\ x\mapsto x^n\end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. (f_n) converge simplement vers $f : \begin{array}{l}[0;1]\\ x\mapsto \begin{cases}1 & \text{si } x=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{array}$ mais pas uniformément.

Théorème 17 : (de Dini) Soit $(f_n)\in\mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ suite croissante convergeant simplement vers $f\in\mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})$.
Alors : (f_n) converge uniformément vers f.

Théorème 18 : (de Dini) Soit $(f_n)\in\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes convergeant simplement vers $f\in\mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})$.
Alors : (f_n) converge uniformément vers f.

II] Fonctions convexes

1] Notion de fonction convexe

VIII.1 [Rou]

Soit $I\subseteq E$ convexe de $(E;\|\cdot\|)$ espace vectoriel normé.
Soit $f : I\to\mathbb{R}$

Définition 19 : On dit que f est convexe (resp. strictement convexe) si : $\forall x,y\in I$, $\forall\lambda\in[0;1]$, $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ (resp. $x\neq y$ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$).
On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

Exemple 20 : (1) $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |x|\end{array}$ est convexe
(2) $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^x\end{array}$ est convexe
(3) Une fonction affine est affine et concave
(4) Une combinaison linéaire à coefficients réels positifs de fonctions convexes est convexe.

Contrexemple 21 : (1) Le produit de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe.
$x\mapsto x$ et $x\mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ mais pas $x\mapsto x^3$.
(2) La composée de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe.
Si f est convexe non-affine, alors : $-id\circ f$ n'est pas convexe.

2] Caractérisations de la convexité

VIII [Rou]

Théorème 22 : f est convexe ssi $Epi(f) := \{(x;y)\in I\times\mathbb{R} \mid y\geq f(x)\}$ est convexe

Théorème 23 : f est convexe ssi $\forall x,y\in I$, $f_{x,y} : t\mapsto f(tx+(1-t)y)$ est convexe sur $[0;1]$

Théorème 24 : f est convexe ssi $\forall x<y<z$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
ssi $\forall a\in I$, $\tau_a : x\mapsto\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$.

Application 25 : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est affine ssi f est convexe et concave.

Application 26 : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est constante ssi f est convexe et majorée.

3] Régularité des fonctions convexes

VIII.2 [Rou]

Théorème 27 : f est convexe ssi $\forall x,y\in I$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$

Proposition 28 : Si f est continue sur I et convexe sur $\mathring{I}$
Alors : f est convexe sur I

Théorème 29 : Si f convexe est dérivable en $x\in\mathring{I}$ et $f'(x)=0$
Alors : f admet un minimum global en x.

Théorème 30 : Si f est dérivable sur I
Alors : f est convexe ssi f' est croissante sur I
Si de plus f est deux fois dérivable sur I, on a :
f est convexe ssi $f''\geq 0$

Exemples 31 : (1) exp est strictement convexe sur $\mathbb{R}$
(2) log est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$
(3) Pour $p>1$, $x\mapsto x^p$ est convexe strictement sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $0<p<1$, $x\mapsto x^p$ est concave strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.
(4) La fonction $\Gamma : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt\end{array}$ est convexe

III] Applications de la notion de monotonie et de convexité

1] Inégalités de convexité

[VIII.3] [Rou]

Lemme 32: Soit $u, v, p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Alors: $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$ ou $uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q$

Exemple 33: $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) < x$

Application 34: (inégalité de Hölder) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p, q \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Alors: $|\sum_i x_i y_i| \leq (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$

Théorème 34: (de Jensen) Soit $I \subseteq E$ convexe, $f : I \to \mathbb{R}$.

Alors: f est convexe ssi pour toute combinaison linéaire convexe $\sum_i^p \lambda_i x_i$ de points de I, $f(\sum_i^p \lambda_i x_i) \leq \sum_i^p \lambda_i f(x_i)$

2] Inégalités de concentration et convexité en probabilités

[Ber]

Lemme 35: Soit X v.a. réelle $\mathbb{P}$-p.s. bornée par 1, centrée.

Alors: $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp(\frac{t^2}{2})$

Théorème 36: (inégalité de Hoeffding) Soit (X_n) v.a. réelles indépendantes, bornées p.s., centrées telles que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists c_n > 0 \mid |X_n| \leq c_n$ et soit $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

Alors: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$

Application 37: Soit $X_1, \ldots, X_n$ v.a. iid de loi $\mathcal{B}(1; p)$ pour $p \in]0; 1[$.

Alors: $\forall \alpha \in]0; 1[$, $\left[\frac{1}{n} S_n - \sqrt{\frac{2}{n} \ln(\frac{2}{\alpha})} ; \frac{1}{n} S_n + \sqrt{\frac{2}{n} \ln(\frac{2}{\alpha})}\right]$ est un intervalle de confiance par excès au niveau $1-\alpha$ de paramètre d'intérêt p.

[NR]

Proposition 38: (processus de Galton-Watson) Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, intégrable $m := \mathbb{E}[X] < +\infty$, soit $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, soit $(X_{i,j})$ famille de v.a. indépendantes de loi $\mathbb{P}_X$, soit $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{j,n}$, soit $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $\mathbb{P}_{ext} = \mathbb{P}(\{\exists n \in \mathbb{N} \mid Z_n = 0\})$

Alors: (1) Si $m > 1$, alors $\mathbb{P}_{ext}$ est l'unique point fixe de $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_k^{+\infty} p_k s^k$ sur $]0; 1[$.

(2) Si $m \leq 1$, alors $\mathbb{P}_{ext} = 1$.

3] Méthode de Newton

[IV.3.exo48] [Rou]

Soit $f : [c; d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $\forall x \in [c; d]$, $f'(x) > 0$, soit $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et $x_{n+1} = F(x_n)$.

Lemme 39: f a un unique zéro a et $\forall x \in [c; d]$, $\exists z \in [a; x] \mid$ $F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2$

Lemme 40: Il existe $C > 0$ tel que: $\forall x \in [c; d]$, $|F(x) - a| \leq C |x-a|^2$ il existe $\alpha > 0$ tel que $I := [a - \alpha; a + \alpha]$ est stable par F.

Théorème 41: (méthode de Newton) Soit $x_0 \in I$.

Alors: $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$

Corollaire 42: Si de plus $\forall x \in [c; d]$, $f''(x) > 0$

Alors: $I = [a; d]$ est stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) est strictement décroissante (ou constante) et $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

Exemple 43: Pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^2 - y$, la méthode de Newton donne une approximation de $\sqrt{y}$.

<u>Références :</u>

[RDO] Topologie et éléments d'analyse

[GouAn] Les maths en tête Analyse

[Rom] Éléments d'analyse réelle

[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques

[NR] No Reference

[Rou] Petit guide de calcul différentiel

- Ramis
- Gourdon
- Rombaldi
- Bernis
- Rouvière