226

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Exemples. Application à la résolution approchée d'équations.

Soit (E,d) espace métrique, $h\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I] Suites récurrentes

1] Suites récurrentes d'ordre h réelles

[GouAn] IV.1

Définition 1: Une suite $(u_n)\in E^{\mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre h si: $\forall n\geq h$, $u_n = f(u_{n-1},\dots,u_{n-h})$ avec $f: E^h\to E$ application.

Proposition 2: Soit $(u_n)\in E^{\mathbb{N}}$ récurrente d'ordre h pour $f:E^h\to E$ telle que $u_n\to l\in E$ et f continue en $(l,\dots,l)$.
Alors: $l=f(l,\dots,l)$

Proposition 3: Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $f:I\to\mathbb{R}$ telle que $f(I)\subseteq I$ et $u_0\in I$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
Alors: (1) Si f croissante, alors (u_n) est monotone de sens de monotonie donné par $\operatorname{sign}(u_1-u_0)$.
(2) Si f est décroissante, alors: $f\circ f$ est croissante et (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de monotonie opposés.

Exemple 4: Pour $f(x)=x^3$ sur $\mathbb{R}$, la suite récurrente (u_n) telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ croît si $u_0\geq 0$ et décroît $u_0\leq 0$.

2] Suites complexes

[GouAn] IV.1

Remarque 5: On peut toujours se ramener à étudier une suite récurrente d'ordre 1 en considérant $\left(v_n=\begin{pmatrix}u_n\\ \vdots\\ u_{n+h}\end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
avec: $v_{n+1}=g(v_n)$ et $g: \begin{array}{ccc} E^h & \longrightarrow & E^h \\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_h\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}f(x_1,\dots,x_h)\\ x_2\\ \vdots\\ x_h\end{pmatrix}\end{array}$.

Définition 6: Une suite $(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire homogène d'ordre h si:
$\forall n\geq h$, $u_n = a_1u_{n-1}+\dots+a_hu_{n-h}$ $(a_1,\dots,a_h\in\mathbb{C})$
L'équation $x^h-a_1x^{h-1}-\dots-a_h=0$ s'appelle équation caractéristique de la récurrence.

[GouAn] IV.1

Proposition 7: Soit $(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant une récurrence linéaire homogène d'ordre h pour $(a_1,\dots,a_h)\in\mathbb{C}^h$. Soit $r_1,\dots,r_q$ racines de son polynôme caractéristique de multiplicités $\alpha_1,\dots,\alpha_q$.
Alors: $\exists (P_i)_{i=1}^q\in\mathbb{C}[X]\mid \deg(P_i)<\alpha_i$ et (u_n) est de la forme:
$(u_n = P_1(n)r_1^n+\dots+P_q(n)r_q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 8: Soit $u_0,u_1\in\mathbb{C}$, $\forall n\geq 2$, $u_n=au_{n-1}+bu_{n-2}$, $a,b\in\mathbb{C}$ d'équation caractéristique $(E): x^2-ax-b=0$.
Alors: (1) Si (E) a deux racines $x_1\neq x_2$, alors (u_n) est de la forme: $u_n=\lambda x_1^n+\mu x_2^n$
(2) Si (E) a une racine double x, alors (u_n) est de la forme: $u_n=(\lambda n+\mu)x^n$

3] Quelques exemples fondamentaux de suites récurrentes

[GouAn] IV.1

Définition 9: Une suite $(u_n)\in E^{\mathbb{N}}$ avec E espace vectoriel est dite arithmétique si elle est de la forme: $u_{n+1}=u_n+a$.
Une suite $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est géométrique si elle est de la forme $u_{n+1}=qu_n$ avec $q\in\mathbb{C}$.

Proposition 10: Soit $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ géométrique
Alors: (1) Si $|q|>1$, alors (u_n) diverge
(2) Si $|q|<1$, alors (u_n) converge vers 0
(3) Si $q=1$, alors (u_n) est constante.

Proposition 11: (1) Si $(u_n)\in E^{\mathbb{N}}$ est arithmétique, alors $u_n=na+u_0$
(2) Si $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est géométrique, alors $u_n=q^nu_0$.

Définition 12: Une suite $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est homographique si elle est de la forme: $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$ avec $ad-bc\neq 0$.

Proposition 13: Soit $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ homographique et $(E): cx^2-(a-d)x-b=0$
Alors: (1) Si (E) a deux racines $\alpha\neq\beta$, alors $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}=k^n\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$ avec $k=\dfrac{a-\alpha c}{a-\beta c}$
(2) Si (E) a une racine double α, alors $\dfrac{1}{u_n-\alpha}=\dfrac{1}{u_0-\alpha}+kn$ avec $k=\dfrac{c}{a-\alpha c}$

II] Suites récurrentes et points fixes

1] Théorème du point fixe de Picard

Théorème 14 : (du point fixe de Picard) Soit $(X;d)$ espace métrique complet non-vide, $F: X \to X$ contractante ie $\exists k \in \mathbb{R}_+ \setminus k<1$ et telle que $\forall x,y \in X$, $d(F(x);F(y)) \leq k\, d(x;y)$. [IV.2]

Alors : il existe un unique $a \in X$ tel que $F(a)=a$.
De plus, ce point a est limite de la suite $x_0 \in E$, $x_{n+1}=F(x_n)$ vérifiant : $d(x_n;a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0;x_1)$

Contrexemples 15 : (1) L'hypothèse de complétude est vitale. [Rou]
Pour $X=]0;1[$ et $F(x)=\frac{x}{2}$, F est contractante mais sans point fixe.
(2) L'hypothèse $F(X)\subseteq X$ est vitale.
Pour $X=[0;1]$ et $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, F est contractante mais sans point fixe.
(3) L'hypothèse de contraction est vitale.
Pour $X=\mathbb{R}$ et $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, F n'a pas de point fixe.

Application 16 : (théorème de Cauchy-Lipschitz global) Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $f: I\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue, globalement lipschitzienne en y. [IV.3. exo 60]
Alors : le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0)=x \end{cases}$ a une unique solution.

2] Classification des points fixes

Définition 17 : Soit $F \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ avec $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle ouvert et $a\in I$ point fixe de F. On dit que a est point fixe attractif si $|F'(a)|<1$, super attractif si $F'(a)=0$ et répulsif si $|F'(a)|>1$. [IV.3. exo 48]

Proposition 18 : Soit $F\in\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, $a\in I$ point fixe tel que $|F'(a)|<1$. [Rou]
Alors : (1) $\exists J:=[a-h;a+h]\subseteq I \setminus \forall x\in J$, $|F'(x)|\leq k$ et $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$
(2) Si de plus F' ne s'annule pas sur J, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-a \underset{+\infty}{\sim} F'(a)(x_n-a)$
(3) Si de plus $F\in\mathcal{C}^2$ tel que $F'(a)=0$ et F'' ne s'annule pas sur J,
alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-a \underset{+\infty}{\sim} \frac{F''(a)}{2}(x_n-a)^2$

Proposition 19 : Soit $F\in\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, $a\in I$ point fixe tel que $|F'(a)|>1$. [IV.3.48 [Rou]]
Alors : $\exists J:=[a-h;a+h]\subseteq I \setminus \forall x_0\in J$, $x_0\neq a \Rightarrow (x_n)$ sort de J.

Exemple 20 : (1) Pour $F_1(x)=\sqrt{1+x}$ sur $J=\mathbb{R}_+$, $\forall x_0\in J$, la suite (x_n) vérifiant $x_{n+1}=F_1(x_n)$ converge vers le nombre d'or que l'on exprime : $a=\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}$
(2) Pour $F_2(x)=1+\frac{1}{x}$ et $J=[\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$, on a de même convergence vers le nombre d'or : $a = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\dots}}$

3] Quelques applications de suites récurrentes

Application 21 : Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $p_k=\mathbb{P}(X=k)$, $(X_{i,j})$ v.a. indépendantes de loi $\mathbb{P}_X$ et $m=\mathbb{E}[X]=\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,p_k<+\infty$, $Z_0=1$, $Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$, $\pi_n=\mathbb{P}(Z_n=0)$ et $\mathbb{P}_{ext}=\mathbb{P}(\{\exists n\in\mathbb{N}\setminus Z_n=0\})$ [NR]
Alors : (1) Si $m>1$, alors $\mathbb{P}_{ext}$ est l'unique point fixe de $G_X(s)=\mathbb{E}[s^X]=\sum_i p_k s^k$ sur $]0;1[$
(2) Si $m\leq 1$, alors $\mathbb{P}_{ext}=1$.

Définition 22 : On appelle isobarycentre de $(z_1;\dots;z_n)\in\mathbb{C}^n$ le nombre $g=\frac{z_1+\dots+z_n}{n}$.

Application 23 : Soit P polygône du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1;\dots;z_n\}$, soit $P_0=P$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, P_{k+1} est le polygône dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_k. [Isen]
Alors : la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P.

III] Méthodes de résolutions d'équations

1] Méthode de Newton

Soit $f:[c;d]\to\mathbb{R}$ fonction de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $c<d$, $f(c)<0<f(d)$ et $\forall x\in[c;d]$, $f'(x)>0$. Soit $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ et (x_n) la suite récurrente telle que $x_{n+1}=F(x_n)$.

IV.3.exo 43

[Rou]

Lemme 24 : f admet un unique point fixe $a \in]c;d[$ et $\forall x \in [c;d], \exists z \in [a;x] \setminus F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2$.

Lemme 25 : Il existe $C>0$ tel que : $\forall x \in [c;d], |F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha ; a+\alpha]$ est stable par F.

Théorème 26 : (méthode de Newton) Soit $x_0 \in I$.
Alors : $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$ et $\exists C > 0 \setminus |x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$

Corollaire 27 : Si de plus $\forall x \in [c;d]$, $f''(x) > 0$.
Alors : $I = [a;d]$ est stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) est strictement décroissante (ou constante) avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et
$x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

Exemple 28 : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x^2 - y$. Alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$.

2) Cadre de résolution de $Ax=b$ par méthodes itératives

VIII.1

Définition 29 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On appelle décomposition régulière de A tout couple $(M;N)$ tel que $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{K})$.
Une méthode itérative basée sur une décomposition régulière $(M;N)$ est : $x_0 \in \mathbb{K}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $Mx_{k+1} = Nx_k + b$.
On dit que la méthode itérative converge si : $\forall x_0 \in \mathbb{K}^n$, $x_k \xrightarrow[+\infty]{} x$ avec x tel que : $Ax = b$.

Théorème 30 : Une méthode itérative converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$

[All]

Remarque 31 : (1) La vitesse de convergence est donnée par le théorème de point fixe de Picard.
(2) En pratique, calculer $\rho(M^{-1}N)$ est difficile. On se contente de trouver une norme matricielle $\|.\|$ telle que : $\|M^{-1}N\| < 1$.

Théorème 31 : Soit $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, $(M;N)$ décomposition régulière de A. VIII.1 [All]
Alors : $(M^* + N) \in H_n(\mathbb{C})$
De plus, si $(M^* + N) \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

3) Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation

VIII.2 [All]

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$

Méthode	$A = M - N$	$M^{-1}N$	itération
Jacobi	$A = D - (E+F)$	$J = D^{-1}(E+F)$	$Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D-E) - F$	$L_1 = (D-E)^{-1}F$	$(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation	$A = (\frac{1}{\omega}D - E) - (\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$	$L_\omega = (\frac{1}{\omega}D - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$	$(\frac{1}{\omega}D - E)u_{k+1} = (\frac{1-\omega}{\omega}D + F)u_k + b$

VIII.5

Proposition 32 : Les méthodes précédentes requièrent $\mathcal{O}(\frac{3n^2}{2})$ opérations arithmétiques par itération.

Références :

[GouAn] Les maths en tête Analyse - Gourdon

[Rou] Petit guide de calcul différentiel - Rouvière

[NR] No Reference !!

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

[All] Algèbre linéaire numérique - Allaire