222

Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

I] Utilisation des séries de Fourier

1] Coefficients de Fourier

[ElAm] VI

Définition 1: Soit $f\in\mathcal{C}_m$, 2π-périodique. On appelle coefficients de Fourier exponentiels : $\left(c_n(f):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, coefficients de Fourier trigonométriques : $\left(a_n(f):=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(b_n(f):=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On appelle série de Fourier de f :

$$S(f)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt)$$

Théorème 2: (de Parseval) Soit $f\in\mathcal{C}_m$, 2π-périodique.
Alors : $\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt=\frac{1}{4}|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right)$

Lemme 3: (de Riemann-Lebesgue) Soit $f\in\mathcal{C}_m([a;b])$.
Alors : $\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{ixt}dt=\lim_{x\to-\infty}\int_a^b f(t)e^{ixt}dt=0$

Théorème 4: (de Dirichlet) Soit $f\in\mathcal{C}^1_m$, 2π-périodique.
Alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=S(f)(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(f)e^{inx}$

2] Exemple de résolution d'une équation de la chaleur

[Isa]

Théorème 5: Soit $u_0\in L^2([0;2\pi])$ et $d_n=c_n(u_0)$ ses coeffs de Fourier.
Alors : $\exists!\, u:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in\mathcal{C}^\infty$ telle que :
(1) $\forall t>0$, $x\mapsto u(t;x)$ est 2π-périodique
(2) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$
(3) $\partial_t u=\Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
(4) $x\mapsto u(t;x)$ converge en norme L^2 vers u_0 lorsque $t\to0$

3] Résolution plus concrète

[Ber] XII.6

Définition 6: L'équation de la chaleur unidimensionnelle est :

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta_x u=0 & ,\ (t;x)\in\mathbb{R}_+^*\times]0;L[\\ u(t;0)=u(t;L)=0 & ,\ t\in\mathbb{R}_+\\ u(0;x)=u_0(x) & ,\ x\in[0;L]\end{cases}$$

d'inconnue $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*\times[0;L])$

XII.6 [Ber]

Proposition 7: Si $u(t;x)=f(t)g(x)$ est solution avec $f,g\neq0$.
Alors : $\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{g''(x)}{g(x)}=C$ et les solutions de $f'(t)=Cf(t)$ sont de la forme $f(t)=Ae^{Ct}$ avec A constante.
(i) Si $C=0$, alors $g(x)=\alpha x+\beta$
(ii) Si $C>0$, alors $g(x)=\alpha e^{\sqrt{C}x}+\beta e^{-\sqrt{C}x}$
(iii) Si $C<0$, alors : $g(x)=\alpha\cos(\sqrt{-C}x)+\beta\sin(\sqrt{-C}x)$

Corollaire 8: En prenant en compte les conditions aux limites,
(i) Si $C=0$, alors $g(x)=0$
(ii) Si $C>0$, alors $g(x)=0$
(iii) Si $C<0$, alors $g(x)=\beta\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ et $C=-\frac{k^2\pi^2}{L^2}$

Proposition 9: Si $u(t;x)=f(t)g(x)$ est solution,
Alors : les $u_k(t;x)=b_ke^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ sont leur forme

Proposition 10: Soit $u_0\in\mathcal{C}^1([0;L])$ avec $u_0(0)=u_0(L)=0$, impaire, $2L$-périodique telle que $u_0(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$.
Alors : $u(t;x)=\sum_{k=1}^{+\infty}b_ke^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ est l'unique solution du problème avec $u\in\mathcal{C}^\infty(]0;+\infty[\times\mathbb{R})\cap\mathcal{C}([0;+\infty[;\mathbb{R})$

II] Utilisation de la transformée de Fourier

1] Transformation de Fourier

Annexe D.5 [Ber]

Définition 11: Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f est :
$\mathcal{F}(f)(\xi)=\hat{f}(\xi):=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-ix\xi}dx\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Théorème 12: Si $f\in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

Théorème 13: $\forall f,g\in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

Exemple 14: Pour $f=\mathbb{1}_{[0;1]}$, $\hat{f}(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{si } y=0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{\sin(\frac{y}{2})}{\frac{y}{2}} & \text{si } y\neq0\end{cases}$

Corollaire 15: L'application $\mathcal{F}:L^1(\mathbb{R})\to\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est linéaire, continue et de norme 1.

Théorème 16: (d'inversion) Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.
Alors : $\forall$ p.p. $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(y)e^{-ixy}dy\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

2) Équation de la chaleur par la transformée de Fourier

XII.6 [Bez]

Remarque 17 : En appliquant $\mathcal{F}$ à : $\begin{cases}\partial_t u = \Delta_x u\\ u(0;x)=u_0(x)\end{cases}$, on a : $\begin{cases}\partial_t \hat u = -\xi^2 \hat u\\ \hat u(0;\xi)=\hat u_0(\xi)\end{cases}$ de solution $\hat u(t;\xi)=\hat u_0(\xi)e^{-t\xi^2}$.

Application 18 : En appliquant la transformée de Fourier inverse, $u(t;x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb R} u_0(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$

Théorème 19 : Soit $u_0:\mathbb R\to\mathbb R$ continue, bornée.
Alors : $u(t;x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb R}u_0(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$ est de classe $\mathcal C^\infty(\mathbb R_+^*\times\mathbb R)$, vérifie l'équation de la chaleur et vérifie la condition initiale au sens : $\forall x^*\in\mathbb R$, $\lim\limits_{(t,x)\to(0^+,x^*)} u(t;x)=u_0(x^*)$

3) Équation des ondes par la transformée de Fourier

XII, exo 21 [Bez]

Définition 20 : L'équation des ondes unidimensionnelle est : $\begin{cases}\Delta_t u=\Delta_x u\\ u(0;x)=u_0(x)\\ \partial_t u(0;x)=0\end{cases}$, $(t,x)\in\mathbb R_+^*\times\mathbb R$ avec $u_0\in\mathcal C^2$.

Remarque 21 : En appliquant $\mathcal F$ au système, on a : $\begin{cases}\Delta_t\hat u=-\xi^2\hat u\\ \hat u(0;\xi)=\hat u_0(\xi)\\ \partial_t\hat u(0;\xi)=0\end{cases}$ de solution $\hat u(t;\xi)=\hat u_0\cos(t\xi)$

Application 22 : En appliquant la transformée de Fourier inverse, on a : $u(t;x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb R}\hat u_0(\xi)\cos(t\xi)e^{ix\xi}d\xi$

III) Équations aux dérivées partielles d'ordre 1

1) Équation de transport

XII.5 [Bez]

Définition 23 : Soit $I\subseteq\mathbb R$ intervalle, $a:I\times\mathbb R\to\mathbb R$ de classe $\mathcal C^1$, $u_0:\mathbb R\to\mathbb R$ de classe $\mathcal C^1$. On appelle équation de transport $\begin{cases}\partial_t u + a(t;x)\partial_x u=0\\ u(0;x)=u_0(x)\end{cases}$ d'inconnue $u:J\times\mathbb R\to\mathbb R$ de classe $\mathcal C^1$ avec $J\subseteq I$ et $0\in J$.

XII.5 [Bez]

Remarque 24 : Puisque $\frac{d}{dt}[u(t;\varphi(t))]=\partial_t u(t;\varphi(t))+\varphi'(t)\partial_x u(t;\varphi(t))$, si φ est solution de $\xi'=a(t;\xi)$, alors $\frac{d}{dt}[u(t;\varphi(t))]=0$ tout le long de $x=\varphi(t)$. Il y a correspondance entre satisfaire l'EDP et être constant le long des graphes des solutions de $\xi'=a(t;\xi)$

Définition 25 : On appelle équation caractéristique $\xi'=a(t;\xi)$ et courbes caractéristiques $x=\varphi(t)$.

Méthode 26 : (des caractéristiques directes) Pour y fixé, soit $t\mapsto\varphi_y(t)$ la solution maximale au problème $\begin{cases}\xi'(t)=a(t;\xi(t))\\ \xi(0)=y\end{cases}$

Ainsi, $\frac{d}{dt}[u(t;\varphi_y(t))]=0$ ssi $u(t;\varphi_y(t))=u(0;y)=u_0(y)$

On résout, en y, $\varphi_y(t)=x$ de solution $\Gamma(t;x)$ et alors :
$u(t;x)=u(t;\varphi_y(t))=u(0;\varphi_y(0))=u_0(y)=u_0(\Gamma(t;x))$

Méthode 27 : (des caractéristiques rétrogrades) À t,x fixés, soit $s\mapsto\psi_x(s)$ la solution maximale au problème $\begin{cases}\xi'(s)=a(s;\xi(s))\\ \xi(t)=x\end{cases}$

Ainsi, $\frac{d}{dt}[u(t;\psi(t))]=0$ ssi $u(t;\psi(t))=u_0(\psi_x(0))$

Exemple 28 : Soit $a\in\mathbb R$, la solution de $\begin{cases}\partial_t u+a\partial_x u=0\\ u(0;x)=u_0(x)\end{cases}$ est : $u(t;x)=u_0(x-at)$ par les deux méthodes

2) Formalisation des méthodes des caractéristiques

XII.5 [Bez]

Définition 29 : Soit $(t;x)\in I\times\mathbb R$. Le flot de l'équation de transport sur $I\times I\times\mathbb R$ est la solution maximale $s\mapsto X(s;t;x)$ de $\begin{cases}\xi'(s)=a(s;\xi(s))\\ \xi(t)=x\end{cases}$.

Lemme 30 : Soit $I\subseteq\mathbb R$ intervalle, $a:I\times\mathbb R\to\mathbb R$ de classe $\mathcal C^1$ telles que les solutions maximales de $\xi'(s)=a(s;\xi(s))$ sont globales.

Alors : (1) $\forall t_1,t_2,t_3\in I,\ \forall x\in\mathbb R$, $X(t_1;t_3;x)=X(t_1;t_2;X(t_2;t_3;x))$

(2) $\forall s,t\in I,\ \forall x\in\mathbb R$, $\partial_t X(s;t;x)+a(t;x)\partial_x X(s;t;x)=0$

XII.5

Proposition 31 : Soit $a : I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle contenant 0, $u_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\forall y\in\mathbb{R}$, soit $t\mapsto\varphi_y(t)$ solution maximale de $\begin{cases}\xi'(t)=a(t,\xi(t))\\ \xi(0)=y\end{cases}$ telles que $(t,y)\mapsto(t,\varphi_y(t))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'application réciproque $(t,x)\mapsto(t,\Gamma(t,x))$.
Alors : $\exists!\, u : I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ solution de l'équation de transport donnée par $u(t,x)=u_0(\Gamma(t,x))$.

[Ber]

Proposition 32 : Soit $a : I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle contenant 0 et telle que les solutions maximales de $\xi'=a(t,\xi)$ sont globales. Soit $u_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, soit $X : I\times I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le flot de $\xi'=a(t,\xi)$.
Alors : $\exists!\, u : I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ solution de l'équation de transport donnée par $u(t,x)=u_0(X(0,t,x))$

Remarque 33 : L'hypothèse que les solutions maximales sont globales est par exemple vérifiée pour les $a : I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $|a(t,x)|\le C(1+|x|)$

Exemple 34 : (1) Les solutions de $\begin{cases}\partial_t u+x\partial_x u=0\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}$ pour $u_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est : $u(t,x)=u_0(xe^{-t})$
(2) Les solutions de $\begin{cases}\partial_t u+a\partial_x u=0\\ u(t,0)=u_b(t)\end{cases}$ pour $u_b : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a\in\mathbb{R}^*$ est : $u(t,x)=u_b\left(t-\frac{x}{a}\right)$

IV] Résolution d'EDP dans les espaces de Sobolev

1] Dérivée faible et espaces de Sobolev

IX.2

Définition 35 : On dit que $u\in L^p(I)$ a une dérivée faible si : $\exists v\in L^p(I)\mid\forall\varphi\in\mathcal{C}^1_K(I)$, $\int_I u(t)\varphi'(t)\,dt=-\int_I v(t)\varphi(t)\,dt$

Exemple 36 : $u : \begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x\mapsto x\mathbb{1}_{[0;1[}(x)\end{array}$ a pour dérivée faible $v=\mathbb{1}_{[0;1[}$

[Li]

Lemme 37 : Soit $v_1,v_2\in L^1_{loc}(I)$ telles que : $\forall\varphi\in\mathcal{C}^1_K(I)$, $\int_I v_1(t)\varphi(t)\,dt=\int_I v_2(t)\varphi(t)\,dt$. Alors $v_1=v_2$ presque partout

IX.2

Proposition 38 : Si u admet une dérivée faible, alors elle est unique et on la note $u'=v$.

[Li]

Définition 39 : Pour $p\in[1;+\infty[$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est :
$W^{1,p}(I)=\{u\in L^p(I)\mid u$ a une dérivée faible $u'\in L^p(I)\}$
muni de $\|u\|_{W^{1,p}}=\|u\|_p+\|u'\|_p$
Pour $p=2$, on note $H^1(I)=W^{1,2}(I)$ muni du produit scalaire $\langle u|v\rangle=\langle u|v\rangle_2+\langle u'|v'\rangle_2$ de norme : $\|u\|_{H^1}=\left(\|u\|_2^2+\|u'\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Proposition 40 : $(H^1(I);\langle\,;\,\rangle)$ est un espace de Hilbert séparable.

[Isen]

Théorème 41 : (de Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert, f une forme bilinéaire continue coercive et φ une forme linéaire
Alors : $\exists!\, u\in H\mid\forall v\in H$, $f(u;v)=\varphi(v)$

Application 42 : Soit $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert borné et $\forall i,j\in[\![1;n]\!]$, $(a_{i,j})\in L^\infty(\Omega)$ $f\in L^2(\Omega)$ et $b_0>0$. Soit (E) le problème : $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ tel que : $-\sum_{i,j}\partial_i(a_{i,j}\partial_j u)+b_0u=f$. Si l'opérateur précédent vérifie :
$\exists\mu>0\mid\forall x=(x_1;\dots;x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\forall y\in\mathbb{R}^n$, $\sum_{i,j}a_{i,j}(y)x_ix_j\ge\mu\sum_i x_i^2$
Alors : $\exists!\, u\in H^1_0(\Omega)$ solution de (E).

Références:

[ElAm] Suites et séries numériques / de fonctions - El Amrani

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

[Ber] Équations différentielles - Berthelin

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li