213

Espaces de Hilbert. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I ensemble, $n\in\mathbb{N}^*$

I] Du préhilbertien à l'hilbertien

1] Espace vectoriel muni d'un produit scalaire

II.1 [Li]

Définition 1: On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique (ou hermitienne) qui est définie positive. On note $<;>$.

Exemple 2: (1) Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est : $\langle x;y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(2) Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$ est : $\langle x;y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

Remarque 3: Si H est muni d'un produit scalaire $<;>$ alors H est naturellement muni de la norme : $\|x\| = \sqrt{\langle x;x\rangle}$

Proposition 4: $\forall x,y\in H$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x;y\rangle$ (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x;y\rangle$ (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

Théorème 5: (inégalité de Cauchy-Schwarz)
$\forall x,y\in H$, $|\langle x;y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$
avec égalité ssi x et y sont linéairement liés

Corollaire 6: Pour tout $y\in H$, l'application $\Phi_y : \begin{array}{l} H \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \langle x;y\rangle \end{array}$ est continue de norme $\|\Phi_y\| = \|y\|$

Définition 7: On dit que deux vecteurs $x,y\in H$ sont orthogonaux si $\langle x;y\rangle = 0$. On note $x\perp y$.

Remarque 8: Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, alors : $x\perp y$ ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Définition 9: Soit $A\subseteq H$. On appelle orthogonal de A :
$A^\perp := \{y\in H \mid \forall x\in A,\ x\perp y\}$

Proposition 10: Soit $A\subseteq H$.
Alors : $A^\perp$ est la plus grande partie orthogonale à A et $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

2] Espaces de Hilbert et théorème de projection

II.2 [Li]

Définition 11: On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme induite.

Exemple 12: Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

Théorème 13: (de projection) Soit $(H;<;>)$ espace de Hilbert, $C\subseteq H$ convexe fermé non-vide.
Alors : $\forall x\in H$, $\exists!\, p_C(x)\in C \setminus \|x-y\| = d(x;C)$. $p_C(x)$ est appelé projection de x sur C et est caractérisé par :
$p_C(x)\in C$ et $\forall z\in C$, $\mathrm{Re}\langle x-p_C(x);z-p_C(x)\rangle \leq 0$

Corollaire 14: Dans ce cas, l'application $p_C : H\to C$ est 1-lipschitzienne i.e. $\forall x_1;x_2\in H$, $\|p_C(x_1)-p_C(x_2)\| \leq \|x_1-x_2\|$

Théorème 15: Soit $F\subseteq H$ sous-e.v. fermé, $x\in H$.
Alors : l'application $p_F : H\to F$ est linéaire, continue et $p_F(x)$ est l'unique point $y\in F$ tel que $y\in F$ et $x-y\in F^\perp$

Corollaire 16: Dans ce cas, F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

Application 17: $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

3] Conséquences sur le dual et l'existence d'un adjoint

II.2 [Li]

Définition 18: On appelle dual de H l'ensemble :
$H^* := \{\Phi : H\to\mathbb{K} \mid \Phi \text{ linéaire, continue}\}$

Théorème 19: (de représentation de Riesz) Soit $(H;<;>)$ espace de Hilbert.
Alors : $\forall \Phi\in H^*$, $\exists! y\in H \setminus \forall x\in H$, $\Phi(x) = \langle x;y\rangle$.

Proposition 20: Soit $(H;<;>)$ espace de Hilbert.
Alors : $\forall T\in\mathcal{L}(H)$, $\exists! T^*\in\mathcal{L}(H) \setminus \forall x,y\in H$, $\langle T(x);y\rangle = \langle x;T^*(y)\rangle$
T^* est appelé adjoint de T et on a : $\|T^*\| = \|T\|$

[Isen]

Définition 21 : Soit $\|\cdot\|$ norme sur H, $\varphi \in \mathcal{L}(H)$ et f forme bilinéaire sur H. On dit que φ est continue si : $\exists \Pi > 0 \mid \forall u \in H$, $|\varphi(u)| \leq \Pi \|u\|$. On dit que f est continue si : $\exists \Pi > 0 \mid \forall u, v \in H$, $|f(u;v)| \leq \Pi \|u\| \|v\|$ et f est coercive si : $\exists \mu > 0 \mid \forall x \in H$, $|f(x;x)| \geq \mu \|x\|^2$

Théorème 22 : (de Lax-Milgram) Soit $(H;\langle;\rangle)$ espace de Hilbert, f forme bilinéaire sur H continue, coercive et $\varphi \in \mathcal{L}(H)$.
Alors : $\exists! u \in H \mid \forall v \in H$, $f(u;v) = \varphi(v)$

II] Bases hilbertiennes

1] Familles orthonormales

II.3

Définition 23 : Soit $(e_i) \in H^I$. On dit que (e_i) est une famille orthonormée si : $\forall i \in I$, $\|e_i\| = 1$ et $\forall i \neq j$, $e_i \perp e_j$

Exemple 24 : Dans $L^2_{2\pi}$, la famille $(e_n : t \mapsto e^{2i\pi t n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle f;g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Proposition 25 : Soit $(e_i)_{i=1}^n$ famille orthonormée.
Alors : $\forall (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}$, $\|\sum_{k=1}^n a_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$.

[Li]

Proposition 26 : (inégalité de Bessel) Soit $(H;\langle;\rangle)$ espace préhilbertien, $(e_i) \in H^I$ famille orthonormée et $x \in H$.
Alors : $\sum_{i \in I} |\langle x; e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Proposition 27 : Soit $(H;\langle;\rangle)$ espace préhilbertien, $(e_n) \in H^{\mathbb{N}}$ famille orthonormée.
Alors : si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \langle x; e_n \rangle$

Application 28 : Soit $(e_n) \in H^{\mathbb{N}}$ famille orthonormée, $x = \sum^{+\infty} \lambda_n e_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n := \mathrm{Vect}(e_0; \dots; e_n)$
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{F_n}(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i$

2] Bases hilbertiennes

II.3

Définition 29 : Soit $(H;\langle;\rangle)$ espace préhilbertien, $(e_n) \in H^{\mathbb{N}}$. On dit que (e_n) est une base orthonormée de H ou base hilbertienne de H si (e_n) est orthonormale et si $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_n)}$

Remarque 30 : Une base hilbertienne n'est, en général, pas une base algébrique.

[Li]

Théorème 31 : Soit $(H;\langle;\rangle)$ espace préhilbertien et $(e_n) \in H^{\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.
Alors : (1) $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$ avec $\lambda_n = \langle x; e_n \rangle$
(2) (formule de Parseval) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum^{+\infty} |\langle x; e_n \rangle|^2$

Théorème 32 : Tout espace de Hilbert séparable possède des bases hilbertiennes.

III] Étude de l'espace L^2

1] Avec les séries de Fourier dans $L^2_{2\pi}$

IV.I.2 II.IV.II I.III.1

Définition 33 : On munit l'espace $L^2_{2\pi} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ 2π-périodique, mesurable telle que $\|f\|_2 < +\infty\}$ de la norme : $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$

On note $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$, $K_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n$ et $\sigma_N(f) = f * K_N$

Exemple 34 : $\sigma_N(\cos)(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}\cos(2\pi k t)}{4k^2 - 1}$

Théorème 35 : (de Fejér) (1) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors en notant : $\sigma_N(f) := f * K_N$, $\lim_{N \to +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$
(2) Soit $f \in L^2_{2\pi}$, alors : $\lim_{N \to +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_2 = 0$

Corollaire 36 : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$

[Z]

Application 37 : Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que :
$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$

2) Avec les polynômes orthogonaux dans $L^2(I;\rho)$

[OA] III.1.5

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle.

Définition 38: On appelle fonction poids toute $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.

On note $L^2(I;\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue muni du produit scalaire: $\langle f; g\rangle_\rho := \int_I f(x)\,\overline{g(x)}\,\rho(x)\,dx$.

Proposition 39: $(L^2(I;\rho); \langle ; \rangle_\rho)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 40: Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que: $\deg(P_n) = n$. Cette famille est appelée famille des polynômes orthogonaux associés à la fonction poids ρ.

Exemples 41: (1) Si $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, alors: les polynômes orthogonaux associés à ρ sont les polynômes de Hermite:
$P_0 = 1$; $P_1 = X$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$; $P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$; ... ; $P_n = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

(2) Si $I = [-1;1]$ et $\rho(x) = 1$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ sont les polynômes de Legendre:
$P_0 = 1$; $P_2 = X$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$; $P_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$; ... ; $P_n = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$

Théorème 42: Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, ρ fonction poids telle que $\exists a > 0 \mid \int_I e^{a|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$

Alors: la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ : (P_n) forme une base hilbertienne de $L^2(I;\rho)$

Contrexemple 43: L'hypothèse sur ρ est vitale.
Soit $w : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-\ln(x)} \end{array}$. La famille des polynômes orthogonaux associés à w ne forme pas une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+; w)$.

Références :

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques

[ZQ] Analyse pour l'agrégation

[OA] Objectif Agrégation

- Li
- Isenmann
- Zuily
- Beck