203

Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

I] Approximation par des fonctions polynomiales

1] Approximation locale et globale par formules de Taylor

[Rom] I.1

Théorème 1 : (formule de Taylor-Lagrange) Soit $f\in\mathcal{C}^n([a;b];\mathbb{R})\cap\mathcal{D}^{n+1}(]a;b[)$.
Alors : $\exists c\in]a;b[\mid f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Corollaire 2 : (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit $f\in\mathcal{C}^n([a;b])\cap\mathcal{D}^{n+1}(]a;b[)$ et $f^{(n+1)}$ majorée par $M\in\mathbb{R}$ sur $]a;b[$
Alors : $\left\|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right\|\le\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Théorème 3 : (formule de Taylor avec reste intégral) Soit $f\in\mathcal{C}^{n+1}([a;b])$
Alors : $f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,dt$

Théorème 4 : (formule de Taylor-Young) Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert, $f\in\mathcal{C}^n(U;\mathbb{R})$ et $a\in U$.
Alors : $f(a+h)\underset{h\to 0}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{d_a^kf}{k!}.h^k+o(\|h\|^k)$

Exemples 5 : Par les formules de Taylor, on a : $\forall x\in\mathbb{R}$,
$|\sin(x)-x|\le\frac{|x|^3}{3!}$; $\left|\sin(x)-x+\frac{x^3}{3!}\right|\le\frac{|x|^5}{5!}$; $|\cos(x)-1|\le\frac{x^2}{2}$

2] Densité dans les fonctions continues

[Li] II.4.1

Définition 6 : Soit K espace compact. Une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$ est un sous-ev stable par multiplication.
Une sous-algèbre A de $\mathcal{C}(K)$ sépare les points de K si : $\forall x\neq y,\ \exists f\in A \mid f(x)\neq f(y)$.

Exemple 7 : Les fonctions polynomiales sur K forment une sous-algèbre, qui sépare les points, de $\mathcal{C}(K)$.

Soit pour la suite K un espace compact.

Théorème 8 : (de Stone-Weierstrass réel) Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$ qui sépare les points de K et qui contient les constantes.
Alors : A est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$

Remarque 9 : A contient les constantes ssi $\mathbb{1}\in A$

Application 10 : Soit $K\subseteq\mathbb{R}^d$ compacte.
Alors : $\mathcal{P}(K;\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes réels à d variables restreints à K est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$.

Remarque 11 : On retrouve le théorème de Weierstrass pour $d=1$

Théorème 12 : (de Weierstrass) Soit $[a;b]\subseteq\mathbb{R}$ intervalle.
Alors : l'espace des fonctions polynomiales sur $[a;b]$ est dense dans $\mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})$

[Les]

Lemme 12 : Soit $(b_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq : $b_n\xrightarrow[+\infty]{}b$ et $a\in[0;1[$.
Alors : pour toute suite $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=au_n+b_n$, (u_n) converge.

Application 13 : Soit $p\in]0;1[$, (ξ_n) v.a. de même loi $\xi_0\sim\mathcal{B}(p)$, (U_n) v.a. de même loi $U_0\sim\mathcal{U}([0;1])$ toutes indépendantes.
Soit $X_0=x\in[0;1]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=U_nX_n+\xi_n(1-U_n)$
Alors : (X_n) converge en loi vers une loi bêta $B(p;1-p)$.

3] Densité des polynômes orthogonaux dans $L^2(I;\rho)$

[OA] III.1.5

Définition 14 : On appelle fonction poids $\rho : I\to\mathbb{R}_+^*$ avec $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle tq : $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_I|x|^n\rho(x)dx<+\infty$.

Exemple 15 : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*\\ x\mapsto e^{-x^2}\end{array}$ est une fonction poids

Proposition 16 : Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, et ρ fonction poids,
$L^2(I;\rho):=\{f:I\to\mathbb{C}\mid\int_I|f(x)|^2\rho(x)dx<+\infty\}$.
Alors : $L^2(I;\rho)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f|g\rangle=\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$.

Soit pour la suite $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle.

Théorème 17 : Pour ρ fonction poids, il existe une unique $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ polynômes unitaires, 2 à 2 orthogonaux tels que $\deg(P_n)=n$.

III.1.5

Remarque 18: Cette famille (P_n) s'obtient en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à (X^n).

Exemple 19: Pour $\rho(x)=e^{-x^2}$, les polynômes orthogonaux associés à ρ sont les polynômes de Hermite:
$P_0 = 1$; $P_1 = X$; $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$; $P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X$; ...

[OA]

Théorème 20: Soit ρ fonction poids et $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$

Alors: les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Exemple 21: Les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}; x \mapsto e^{-x^2})$.

II] Approximation des fonctions périodiques

1] Polynômes trigonométriques et coefficients de Fourier

IV.I.2

Définition 22: On note $L^p_{2\pi} := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ est 2π-périodique, mesurable, $\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \}$ pour $p \in [1;+\infty]$. Soit $f \in L^1_{2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Le n-ième coefficient de Fourier de f: $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$

Proposition 23: Soit $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, $n,k \in \mathbb{Z}$

Alors: (1) $c_n(f \circ -id_{\mathbb{R}}) = c_{-n}(f)$ (2) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

(3) $c_n(\tau_a(f)) = e^{ina}c_n(f)$ (4) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$

(5) $f * e_n = c_n(f)e_n$ (6) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$, alors: $c_n(f') = in\,c_n(f)$

avec $e_n : x \mapsto e^{inx}$.

[ZQ]

Lemme 24: (de Riemann-Lebesgue) Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1([a;b])$

Alors: $\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = \lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = \lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$

Exemple 25: Pour $f(t) = t^2$,
$$c_n(f) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} & \text{si } n=0 \\ (-1)^n \frac{2}{n^2} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

2] Noyaux pour approcher des fonctions

IV.II.2

Définition 26: Le noyau de Dirichlet d'ordre $N \in \mathbb{N}$ est:
$D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$ avec $e_k : x \mapsto e^{-ikx}$.

Proposition 27: Soit $N \in \mathbb{N}$.
Alors: D_N est pair, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $D_N(x) = \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

[ZQ]

Proposition 28: $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall f \in L^1_{2\pi}$, $S_N(f) := \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e_k = f * D_N$.

Définition 29: Le noyau de Fejér d'ordre N est:
$K_N := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k$

Proposition 30: Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors: $K_N = \sum_{k=-N}^{N}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)e_k$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $K_N(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{\sin\left[\frac{Nx}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2 \geq 0$

Proposition 31: $\forall N \geq 1$, $\forall f \in L^1_{2\pi}$, $\sigma_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f) = f * K_N = \sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n$

3] Résultats de convergence

IV.III.1

Théorème 32: (de convergence de Fejér) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Alors: (1) $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\lim_{N \to +\infty}\|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$

(2) $\forall f \in L^p_{2\pi}$, $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$, $p \in [1;+\infty[$

Corollaire 33: (1) $\mathrm{Vect}(e_n \mid n \in \mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$

(2) $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)$

(3) $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$, $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$

[ZQ]

(4) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de L^2 et $\forall f \in L^2$,
$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2$ et $\lim_{N\to+\infty}\|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Théorème 34: (de Dirichlet) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, mesurable, intégrable sur $[0;2\pi]$ tq: $f^+ := \lim_{t\to 0^+} f(x+t)$ et $f^- := \lim_{t \to 0^-} f(x+t)$ existent et $x \in \mathbb{R}$, et tq: $\exists \delta > 0 \mid \int_0^\delta \frac{|f(x+t) - f^+|}{t}dt < +\infty$ et $\int_0^\delta \frac{|f(x-t) - f^-|}{t}dt < +\infty$.

Alors: $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$

[Les]

Application 35: Les intégrales de Fresnel: $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ sont convergentes et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

III) Approximation par des fonctions régulières

1) Approximation de l'unité

IV.14.4 [Br]

Remarque 36: Il n'existe pas d'unité pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Définition 37: Une suite $(\alpha_n)\in L^1(\mathbb{R})$ est une approximation de l'unité si:

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}}\alpha_n(t)\,dt=1$

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}|\alpha_n(t)|\,dt<+\infty$

(3) $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{n\to+\infty}\int_{\{|x|\geq\varepsilon\}}|\alpha_n(t)|\,dt=0$

Exemple 38: Soit $\alpha\in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}}\alpha(t)\,dt=1$.
Alors: $(\alpha_n: x\mapsto n\alpha(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Exemples 39: (1) Noyau de Laplace: $\alpha_t(x)=\frac{1}{2t}e^{-\frac{|x|}{t}}$

(2) Noyau de Cauchy: $\alpha_t(x)=\frac{t}{\pi(t^2+x^2)}$

(3) Noyau de Gauss: $\alpha_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t}e^{-\frac{|x|^2}{2t^2}}$

(4) Noyau à support compact: pour $\alpha\in\mathcal{E}_K$ tel que $\int_{\mathbb{R}}\alpha(t)\,dt=1$,
$\alpha_t(x)=\frac{1}{t^d}\alpha\left(\frac{x}{t}\right)$.

Théorème 40: Soit (α_n) approximation de l'unité, $p\in[1;+\infty[$ et $f\in L^p(\mathbb{R})$
Alors: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f*\alpha_n\in L^p(\mathbb{R})$ et $f*\alpha_n\xrightarrow[+\infty]{} f$

Théorème 41: Soit (α_n) approximation de l'unité et $f\in L^\infty(\mathbb{R})$
Alors: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f*\alpha_n$ est uniformément continue bornée par $\|f\|_\infty\|\alpha_n\|_1$

2) Régularisation par convolution

IV.14.5 [Br]

Théorème 42: Soit $\varphi\in\mathcal{E}_K^n(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ et $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
Alors: $f*\varphi\in\mathcal{E}^n(\mathbb{R})$

Définition 43: Une suite (α_n) est dite régularisante si c'est une approximation de l'unité et si $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n\in\mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R})$.

IV.14.5 [Br]

Exemple 44: Soit $\alpha\in\mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R})$ tq: $\int_{\mathbb{R}}\alpha(t)\,dt=1$ et $(\alpha_n: x\mapsto n\alpha(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$
Plus généralement, toute fonction $\varphi\in\mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt\neq0$ peut donner $\alpha:=\frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt}$

Théorème 45: (1) $\mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{E}_K(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.
(2) $\forall p\in[1;+\infty[$, $\mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_p$

Références :

[Rom] Éléments d'analyse réelle - Rombaldi
[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li
[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre
[OA] Objectif Agrégation - Beck
[ZQ] Éléments d'analyse - Zuily
[Bri] Théorie de l'intégration - Briane