205

Espaces complets. Exemples et applications.

Soit $(X;d)$ un espace métrique, $n \in \mathbb{N}^*$

I] Suites de Cauchy et espaces complets

1] Notion de suite de Cauchy

[II.6] [Has]

Définition 1 : Une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy
si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \forall n, m \geq n_0, \ d(x_m; x_n) < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \ d(x_{n+p}; x_n) < \varepsilon$

Proposition 2 : (1) Toute suite convergente dans X est de Cauchy
(2) Toute suite de Cauchy dans X est bornée
(3) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Contrexemple 3 : Il y a des suites de Cauchy non-convergentes
$\sqrt{2}$ est limite d'une suite de rationnels, suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne convergeant pas dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4 : Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ suite de Cauchy.
Alors : (x_n) est convergente ssi elle possède une sous-suite convergente
ssi (x_n) possède une valeur d'adhérence

Proposition 5 : Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ de Cauchy et $f : X \to Y$ uniformément continue
Alors : $(f(x_n))$ est de Cauchy

Contrexemple 6 : L'uniforme continuité est vitale.
Soit $X =]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$ et $(x_n := \frac{1}{n})$ de Cauchy dans X sans que $(f(x_n) = n)$ soit de Cauchy dans X.

2] Notion d'espace complet

[II.6] [Has]

Définition 7 : On dit que $(X;d)$ est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Remarque 8 : L'avantage des espaces complets est le fait que pour montrer la convergence d'une suite, on n'a pas besoin de connaître la valeur de la limite.

Exemple 9 : $(\mathbb{R}; |.|)$ est complet
$(\mathbb{Q}; |.|)$ n'est pas complet

Remarque 10 : Soit $d(x;y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.
$(\mathbb{R}; d)$ n'est pas complet : par $(x_n := n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien de Cauchy sans que (x_n) converge. La complétude n'est alors pas une notion topologique.

Proposition 11 : Soit $f : X \to Y$ homéomorphisme uniformément continue et Y complet.
Alors : $(X;d)$ est complet.

3] Critères de complétude et propriétés

[II.6] [Has]

Proposition 12 : Tout espace compact est complet

Proposition 13 : Soit $A \subseteq X$.
Alors : (1) Si A est complet, alors A est fermé dans X
(2) Si A est dense dans X et $A \neq X$, alors A n'est pas complet
(3) Si X est complet, A fermé dans X, alors A est complet.

Proposition 14 : Soit $(X_i; d_i)_{i=1}^{p}$ espaces métriques.
Alors $X_1 \times \dots \times X_p$ est complet ssi $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $(X_i; d_i)$ est complet

Application 15 : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{C}^p$ sont complets.

Théorème 16 : (de Cantor)
X est complet ssi pour toute $(F_n) \in X^{\mathbb{N}}$ fermés non-vides décroissante telles que $\lim_{+\infty} \delta(F_n) = 0$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$

II] Complétude dans les espaces de Banach et de Hilbert

1] Espaces de Banach

[VI.1] [Has]

Définition 17 : Un espace de Banach est un espace normé $(E; \|.\|)$ qui est complet pour la distance associé à la norme.

Exemples 18 : (1) $(\mathbb{R}; |.|)$ et $(\mathbb{C}; |.|)$ sont des espaces de Banach
(2) Pour X ensemble non-vide, $(\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K}); \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach
(3) Pour X compact, $(\mathcal{C}(X; \mathbb{K}); \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

IV.4

Application 19: (théorème d'Ascoli) Soit X espace topologique, $(Y;d)$ espace métrique et $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X;Y)$.

Alors: (1) Si $\mathcal{H}$ compacte dans $\mathcal{C}(X;Y)$, alors $\mathcal{H}$ est équicontinue, et pour tout $x\in X$, $\mathcal{H}(x)$ est compacte dans Y.

(2) Si X compact, $\mathcal{H}$ équicontinue et $\forall x\in X$, $\overline{\mathcal{H}(x)}$ compacte dans Y, alors: $\overline{\mathcal{H}}$ est compacte dans $\mathcal{C}(X;Y)$.

VI.3 [Has]

Proposition 20: Soit $(Y;\|\cdot\|_2)$ espace de Banach.

Alors: $(\mathcal{L}(X;Y);\|\cdot\|)$ est un espace de Banach avec

$$\|f\| = \inf\{M>0 \mid \forall x\in X,\ \|f(x)\|_2 \le M\|x\|_1\}$$

IX.3 [Bri]

Lemme 21: Soit $(E;\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-evn.

Alors: $(E;\|\cdot\|)$ est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.

Théorème 22: (de Riesz-Fischer) $\forall p\in[1;+\infty[$, $(L^p;\|\cdot\|_p)$ est complet

2) Espaces de Hilbert

VIII.2

Définition 23: Un espace de Hilbert est un couple $(E;\langle\cdot;\cdot\rangle)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev et $\langle\cdot;\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E induisant une norme rendant E complet.

Exemples 24: (1) Sur $\mathbb{K}^n$, tout produit scalaire définit une structure d'espace de Hilbert.

(2) L^2 est un espace de Hilbert pour $\langle f;g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

[Has]

Théorème 25: (de projection) Soit $(E;\langle\cdot;\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, $A\subseteq E$ partie non-vide convexe, complète pour $\langle\cdot;\cdot\rangle$.

Alors: $\forall x\in E$, $\exists!\, p_A(x)\in A \mid \|x-p_A(x)\| = d(x;A)$.

Ce point est appelé projection de x sur A.

VIII.3

Corollaire 26: Soit $(H;\langle\cdot;\cdot\rangle)$ espace de Hilbert, $F\subseteq H$ sous-ev fermé.

Alors: $H = F\oplus F^\perp$ et $\forall x\in H$, $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$

Corollaire 27: Soit $(H;\langle\cdot;\cdot\rangle)$ espace de Hilbert, F sous-ev de H.

Alors: $H=\overline{F}\oplus F^\perp$ et F est dense dans H ssi $F^\perp=\{0\}$.

VIII.4 [Has]

Théorème 28: (de représentation de Riesz) Soit $(H;\langle\cdot;\cdot\rangle)$ espace de Hilbert, H^* dual topologique de H

Alors: L'application $\Phi: \begin{array}{l} H \to H^* \\ y \mapsto \left[\Phi_y: \begin{array}{l} H\to\mathbb{K} \\ x\mapsto\langle x;y\rangle\end{array}\right]\end{array}$ est une isométrie surjective, ie $\forall\varphi\in H^*$, $\exists!\, y_\varphi\in H \mid \forall x\in H$, $\varphi(x)=\langle x|y_\varphi\rangle$

III) Quelques applications de la notion de complétude

1) Aux théorèmes de prolongement

II.6 [Has]

Théorème 29: (de prolongement des applications uniformément continues) Soit $(X;d)$; $(Y;d')$ espaces métriques, $A\subseteq X$ dense, et Y complet. $f:A\to Y$ uniformément continue.

Alors: f se prolonge de manière unique en une application $\tilde{f}: X\to Y$ uniformément continue.

Contre-exemple 30: L'hypothèse d'uniforme continuité est vitale.
Soit $X=[0;1]$, $A=[0;1[$ et $f: \begin{array}{l} A\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \frac{1}{1-x}\end{array}$, A est dense dans X et A complet mais f ne se prolonge pas à X.

[Isou]

Définition 31: L'espace de Schwartz est:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall k,n\in\mathbb{N},\ \sup_{x\in\mathbb{R}}\{|x^p f^{(k)}(x)|\}<+\infty\}$$

Théorème 32: L'application $\mathcal{F}: \begin{array}{l}\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f\mapsto\left[\xi\mapsto\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\,dx\right]\end{array}$ de transformée de Fourier est bijective.

Théorème 33: Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Alors: $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

Proposition 34: Soit $f\in\mathcal{L}(E;F)$ avec E,F deux $\mathbb{R}$-ev.

Alors: f est continue ssi f est uniformément continue.

Théorème 35: (de Fourier-Plancherel) Soit $\mathcal{P}: \begin{array}{l}\mathcal{S}(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R}) \\ f\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f)\end{array}$

Alors: $\mathcal{P}$ est bien définie, et il existe un unique prolongement isomorphique isométrique de $\mathcal{P}$ à $L^2(\mathbb{R})$.

2] Aux espaces de Hilbert

[IX,2]

Définition 36 : Soit $p \in [1;+\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$ est :
$W^{1,p}(\mathbb{R}) := \{ f \in L^p(\mathbb{R}) \mid \exists g \in L^p(\mathbb{R}) \setminus T_f' = T_g \}$ avec T_f et T_g les distributions associées à f et g.
On note $H^1(\mathbb{R}) = W^{1,2}(\mathbb{R})$ et on le munit de la norme :

$$\|f\|_{H^1} = \left(\|f\|_2^2 + \|T_f'\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 37 : $(H^1(\mathbb{R}); \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert.

[Li]

Définition 38 : Soit $(E; \|\cdot\|)$ un evn, $\varphi \in E^*$ et f une forme bilinéaire sur E. On dit que φ est continue si :
$\exists M > 0 \mid \forall u \in E,\ |\varphi(u)| \leq M \|u\|$. On dit que f est continue si :
$\exists M > 0 \mid \forall u, v \in E,\ |f(u;v)| \leq M \|u\| \|v\|$. On dit que f est coercive si :
$\exists \mu > 0 \mid \forall u \in E,\ f(u;u) \geq \mu \|u\|^2$.

[Isen]

Théorème 39 : (de représentation de Riesz) Soit $(H; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ espace de Hilbert, $\varphi : H \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue sur H.
Alors : $\exists! y \in H \mid \forall x \in H,\ \varphi(x) = \langle x \mid y \rangle$

Théorème 40 : (de Lax-Milgram) Soit $(H; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ espace de Hilbert, f forme bilinéaire sur H, continue et coercive et φ forme linéaire continue sur H.
Alors : $\exists! u \in H \mid \forall v \in H,\ f(u;v) = \varphi(v)$

Application 41 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et $\forall i,j \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et $b_0 > 0$. Soit (E) le problème de trouver $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que : $-\sum_{i,j} \partial_i (a_{i,j} \partial_j u) + b_0 u = f$
Si l'opérateur différentiel précédent vérifie :
$\exists \mu > 0 \mid \forall x = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i,j} a_{i,j}(y) x_i x_j \geq \mu \sum_i x_i^2$
Alors : $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème (E).

Références :

[Has] Topologie générale et espaces normés - Hassan
[Bri] Théorie de l'intégration - Briane
[Isa] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann
[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li