204 Connexité. Exemples et applications

Soit X un espace topologique,

I] Connexité et stabilité de la notion

1) Notion de connexité

[Has] IV.1

Définition 1 : On dit que X est connexe si pour tout ouverts disjoints U et V de X, tels que $X = U \sqcup V$, on a : $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$

Proposition 2 :
X est connexe ssi si $X = U \sqcup V$, U et V ouverts, alors $U=\emptyset$ ou $V=\emptyset$
ssi si $X = F_1 \sqcup F_2$, F_1, F_2 fermés, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$
ssi si $A \subseteq X$ ouvert et fermé, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$
ssi toute application continue $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante
ssi toute application continue $\varphi : X \to \{0;1\}$ est constante

Exemple 3 : Un singleton est connexe.

Définition 4 : On dit que $A \subseteq X$ est connexe si A muni de la topologie induite est connexe.
ie si $A \subseteq U \sqcup V$, U et V ouverts de X tq : $U \cap V \cap A = \emptyset$, alors : $U \cap A = \emptyset$ ou $V \cap A = \emptyset$

Exemple 5 : Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe ssi c'est un intervalle

Contrexemple 6 : Un ensemble dense dans un connexe ne peut pas être connexe.
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ qui est connexe sans être connexe.

Proposition 7 : (lemme de passage des douanes) Soit $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ connexe telle que $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
Alors : $B \cap \partial A \neq \emptyset$

2) Stabilité de la notion

[Has] IV.1

Théorème 8 : Soit $(A_i) \in X^I$ connexes tq : $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$
Alors : $\bigcup A_i$ est connexe.
En particulier, si $\bigcap A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup A_i$ est connexe.

Contrexemple 9 : Une réunion de connexes disjoints n'est pas connexe en général. $\{0\}$ et $\{1\}$ sont connexes dans $\mathbb{R}$ mais $\{0;1\}$ ne l'est pas.

IV.1 [Has]

Théorème 10 : Soit X, Y espaces topologiques et $f : X \to Y$ continue
Alors : si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe

Application 11 : (théorème des valeurs intermédiaires) Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
Alors : $f(I)$ est un intervalle

Théorème 12 : Soit $(A_n) \in X^{\mathbb{N}}$ connexes tq : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.
Alors : $\bigcup A_n$ est connexe.

Proposition 13 : Soit $A, B \subseteq X$ tq : A connexe et $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$.
Alors : B est connexe.

Corollaire 14 : L'adhérence de toute partie connexe est connexe

II] Composantes connexes et connexité par arcs

1) Composantes connexes

IV.2 [Has]

Définition 15 : Soit la relation d'équivalence $\sim$ tq :
$x \sim y \iff$ il existe $A \subseteq X$ connexe tel que $\{x;y\} \subseteq A$.
Les classes d'équivalences de $\sim$ s'appellent les composantes connexes de X. On appelle composante connexe de $x \in X$ la composante connexe qui le contient. Noté C_x.

Exemples 16 : (1) Les composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{R}$ sont des intervalles ouverts
(2) Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

Théorème 17 : Soit $x \in X$.
Alors : (1) $C_x = \bigcup_{\substack{C \text{ connexe} \\ x \in C}} C$. C'est le plus grand connexe contenant x.
(2) Les composantes connexes de X sont connexes et fermées.

IV.2 [Has]

(3) Si $A\subseteq X$ est connexe et C composante connexe de X tq : $A\cap C\neq\emptyset$ alors : $A\subseteq C$. En particulier, $\forall x\in A$, $A\subseteq C_x$

(4) Les composantes connexes de X sont connexes et fermées.

(5) Si $X=\bigsqcup X_i$ avec X_i connexe, ouvert, non-vide, deux à deux disjoints alors : X_i sont les composantes connexes de X.

Contrexemple 18 : Les composantes connexes ne sont pas ouvertes en général.
Les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons, elles sont bien fermées mais pas ouvertes.

2) Connexité par arcs

IV.4 [Has]

Remarque 19 : La connexité par arcs est plus faible que la connexité mais plus maniable car plus analytique.
En pratique, les deux notions coïncident souvent.

Définition 20 : Soit $x,y\in X$. On appelle chemin ou arc dans X reliant x à y toute application continue $\varphi:[0;1]\to X$ telle que $\varphi(0)=x$ et $\varphi(1)=y$.
Soit $\sim$ la relation d'équivalence $x\sim y$ ssi il existe un chemin de X reliant x à y.
On dit que X est connexe par arcs si X possède une unique classe d'équivalence $\sim$, i.e. $\forall x,y\in X$, il existe $\varphi:[0;1]\to X$ continue telle que $\varphi(0)=x$ et $\varphi(1)=y$.

Proposition 24 : Soit X espace vectoriel normé.
Alors : (1) Si X est convexe, alors X est étoilé
(2) Si X est étoilé, alors X est connexe par arcs
(3) Si X est connexe par arcs ssi X est connexe.

Exemples 25 : (1) $\forall n\geq 2$, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs
(2) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. L'épigraphe de f : $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq f(x)\}$ est connexe par arcs.

IV.4 [Has]

Contrexemple 26 : Il existe des connexes, non-connexes par arcs.
$X=\{(0;y)\mid -1\leq y\leq 1\}\cup\{(x;\sin(\frac{1}{x}))\mid x\in]0;1]\}$ est connexe sans être connexe par arcs.

[Rad]

Application 27 : La fonction $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to GL_n(\mathbb{C})$, $A\mapsto\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}$ est surjective.

Exemples 28 : $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

III] Prolongement grâce à la connexité (passage du local au global)

1) En géométrie différentielle

[Rou]

Théorème 29 : (théorème d'inversion globale) (admis) Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert, $f:U\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, injective et $\forall x\in U$, d_xf inversible.
Alors : $f:U\to f(U)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Remarque 30 : En pratique, on est souvent amené à expliciter f^{-1} pour vérifier l'injectivité de f et ce théorème perd alors tout son intérêt. Le théorème suivant se passe de l'injectivité de f au prix d'un comportement de f à l'infini.

Théorème 31 : (d'Hadamard-Lévy) Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\in\mathcal{C}^2$.
Alors : f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ ssi f est propre et $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_xf\in GL(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 32 : On peut supposer $f\in\mathcal{C}^1$ et le résultat reste vrai mais c'est plus dur à montrer.

2) En analyse complexe

IV.2 [Tau] IV.3

Théorème 33 : (principe du prolongement analytique) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ convexe, $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U)$.
Alors : $f = 0$ sur U ssi $f = 0$ sur un voisinage de a
ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$

Corollaire 34 : Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert convexe, $f, g \in \mathcal{H}(U)$.
Alors : si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, alors $f = g$.

Théorème 35 : (principe des zéros isolés) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, convexe et $f \in \mathcal{H}(U) \setminus \{0\}$.
Alors : $Z(f) := \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans U.

Corollaire 36 : Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, convexe.
Alors : $\mathcal{H}(U)$ est intègre.

3) Appliqué à la résolution d'équations différentielles

XIII.III.1 [ZQ]

Définition 37 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $\alpha \in]0;1]$. On note :
$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega) \mid \exists C > 0 \mid \forall x, y \in \Omega,\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha\}$$
et $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$

Exemple 38 : $\forall \alpha \in]0;1]$, $f : \begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^\alpha \end{array} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]-1;1[)$

Remarque 39 : (1) $\mathcal{C}^1_b(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^0_b(\Omega)$
(2) Les fonctions de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ sont uniformément continues.

Proposition 40 : (1) $\forall \alpha \geq \alpha'$, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.
(2) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert borné, $\alpha \geq \alpha'$, alors l'inclusion $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha'}(\Omega)$ est compacte (l'image d'une boule est relativement compacte)

VIII.III.1 [ZQ]

Définition 41 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0;1]$. On définit :
$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^k_b(\Omega) \mid \forall \beta \leq k,\ f^{(\beta)} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\}$$
$\|f\|_{k,\alpha} = \sum\limits_{\beta \leq k} \|f^{(\beta)}\|_\alpha$ et $\|f\|'_{k,\alpha} = \sum\limits_{\beta < k} \|f^{(\beta)}\|_\infty + \|f^{(k)}\|_\alpha$

Théorème 42 : (1) Soit $k + \alpha > k' + \alpha'$, alors $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est compacte.
(2) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert borné, $k+\alpha > k'+\alpha'$, alors l'injection $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte.
(3) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ est compact et borné, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 \mid$
$$\|f\|_{k',\alpha'} \leq \varepsilon \|f\|_{k,\alpha} + C_\varepsilon \|f\|_\infty$$

Théorème 43 : (principe du maximum faible) (admis)
Soit $]a;b[\subseteq \mathbb{R}$, $L = A \dfrac{d^2}{dx^2} + B \dfrac{d}{dx} + C$ avec $A, B, C :]a;b[\to \mathbb{R}$ bornées telles que : $\forall x \in]a;b[$, $A(x) > 0$ et $C(x) \leq 0$. Soit $u \in \mathcal{C}([a;b]) \cap \mathcal{C}^2(]a;b[)$ tel que $L(u) \geq 0$.
Alors : $\sup\limits_{x \in]a;b[} u(x) \leq \sup\limits_{x \in \{a;b\}} \{\sup\{u(x); 0\}\}$

Théorème 44 : Soit $\alpha \in]0;1]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$ avec $q \geq 0$.
Alors : $\forall f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$, $(E) : \begin{cases} -u'' + qu = f \text{ sur }]a;b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)$.

Références :

[Has] Topologie générale et espaces normés - Hassan

[Rou] Petit guide de calcul différentiel - Rouvière

[Tau] Analyse complexe pour la licence 3 - Tauvel

[Zad] Un max de maths - Zavidovique

[ZQ] Éléments d'analyse - Zuily