203

Utilisation de la notion de compacité.

Soit $(E;d)$ un espace métrique, $n\in\mathbb{N}^*$.

I] Caractérisation de la compacité et application aux espaces de Holder.

1] Propriété de Borel-Lebesgue

I.3.1

Définition 1 : On dit que $(E;d)$ est compact si de tout recouvrement de E par des ouverts $E=\bigcup_{i\in I}O_i$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini i.e. il existe $J\subset I$ fini tel que $E=\bigcup_{j\in J}O_j$

Exemples 2 : (1) Si E est fini, alors E est compact.
(2) $\mathbb{R}$ n'est pas compact

Proposition 3 : E est compact ssi pour toute intersection vide de fermés de $\emptyset=\bigcap_{i\in I}F_i$, il existe $J\subset I$ fini tel que $\bigcap_{j\in J}F_j=\emptyset$

Corollaire 4 : Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante de fermés non-vides de E compact.
Alors : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n\neq\emptyset$

[GouAn]

Remarque 5 : Ce résultat reste vrai si E complet et si $\mathrm{diam}(F_n)\underset{+\infty}{\to}0$.

Proposition 6 : Si E compact, alors E est borné.

Définition 7 : Soit $A\subseteq E$. On dit que A est compact si A est compact pour la topologie induite i.e. si $A\subset\bigcup_{i\in I}O_i$ avec O_i ouvert de E, alors il existe $J\subset I$ fini tel que $A\subset\bigcup_{j\in J}O_j$.

I.3.4 I.3.3

Proposition 8 : Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 9 : Une réunion finie de compacts est compacte.

Contrexemple 10 : L'hypothèse de finitude est vitale.
$\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n;n]$ cependant $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

2] Propriété de Bolzano-Weierstrass

I.3.2

Définition 11 : On dit que E est précompact si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un recouvrement fini $E=\bigcup_{i\in I}\mathcal{B}(x_i;\varepsilon)$ avec $x_i\in E$.

Lemme 12 : Soit E vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass i.e. tel que de toute suite de E, on peut extraire une sous-suite convergente
Alors : E est précompact

[GouAn]

Lemme 13 : Soit E vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass
Alors : pour tout recouvrement $E=\bigcup_{i\in I}O_i$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x\in E$, il existe $i\in I$ tel que $\mathcal{B}(x;\alpha)\subset O_i$

Théorème 14 : (de Bolzano-Weierstrass) E est compact ssi de toute suite de E, il existe une sous-suite convergente de E.

I.3.3

Corollaire 15 : E est compact ssi toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence dans E
ssi toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation dans E

I.ex.2

Application 16 : Soit $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ avec E compact admettant une unique valeur d'adhérence x
Alors : (x_n) converge vers x

Théorème 17 : E est compact ssi E est complet et précompact

3] Application de la compacité aux espaces de Holder

VIII.III.

Définition 18 : Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ouvert, $\alpha\in]0;1]$. On définit :
$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)=\{f\in L^\infty(\Omega)\mid\exists C>0\backslash\forall x,y\in\Omega,\ |f(x)-f(y)|\leq C|x-y|^\alpha\}$ muni de la norme : $\|f\|_\alpha=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|+\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$
$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)=\{f\in\mathcal{C}_b^k(\Omega)\mid\forall|\beta|\leq k,\ \partial^\beta f\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)\}$ muni de la norme :
$\|f\|_{k,\alpha}=\sum_{|\beta|\leq k}\|\partial^\beta f\|_\alpha$

[ZQ]

Proposition 19 : Pour $f\in\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$, $\|f\|_{2,\alpha}=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty+\|f''\|_{0,\alpha}$

Proposition 20 : Soit Ω ouvert borné et $k+\alpha>k'+\alpha'$
Alors : $\forall\varepsilon>0,\exists C_\varepsilon>0\backslash\forall f\in\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, $\|f\|_{k',\alpha'}\leq\varepsilon\|f\|_{k,\alpha}+C_\varepsilon\|f\|_\infty$.

XI.I.3

Lemme 21 : (principe du maximum faible) (admis) Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert borné, L opérateur sur $\mathcal{C}^2(\bar\Omega)$ tel que $L(u)(x)=\sum_{i,j}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}(x)+\sum_i^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)+c(x)$ avec $(a_{ij}),(b_i)$ des fonctions réelles bornées sur Ω et telles que $\forall x\in\Omega$, $(a_{ij}(x))$ est symétrique positive et $\exists i_0\in[\![1;n]\!]$ $\exists C_0>0\backslash a_{i_0,i_0}(x)\geq C_0$ et $c(x)\leq0$. Soit $u\in\mathcal{C}(\bar\Omega)\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $L(u)\geq0$
Alors : $\sup_{x\in\bar\Omega}u(x)\leq\sup_{y\in\partial\Omega}\{\sup(u(y));0\}$

VIII.III

Théorème 22 : Soit $\alpha\in]0;1]$, $a,b\in\mathbb{R}$ et $q\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$ tel que $q\geq0$.
Alors : $\forall f\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$, $\forall u_0,u_1\in\mathbb{R}$, $(E):\begin{cases}-u''+qu=f\text{ sur }]a;b[\\u(a)=u_0\text{ et }u(b)=u_1\end{cases}$ admet une unique solution $u\in\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)$.

II] Fonctions continues sur un compact

1] Compacité et extrema

Soit E, F deux espaces métriques et $f : E \to F$ application.

I.3.4 [Gou An]

Proposition 23 : Si E est compact et f continue.
Alors $f(E)$ est compact

Corollaire 24 : Soit E compact, f continue et $F \subset E$ fermé.
Alors : $f(F)$ est fermé

Contrexemple 25 : L'hypothèse de compacité est vitale.
$x \mapsto \arctan(x)$ envoi le fermé $\mathbb{R}$ sur l'ouvert $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

Corollaire 26 : Si E est compact et f continue et bijective
Alors : f^{-1} est continue.

Corollaire 27 : Soit E compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue.
Alors : f est bornée et atteint ses bornes

II.1.3

Application 28 : (théorème de Rolle) Soit $K \subset E$ compact, $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathring{K}$ et continue sur K et constante sur ∂K.
Alors : il existe $c \in \mathring{K}$ tel que $df(c) = 0$

Exemple 29 : Les polynômes de Hermite définis par $(e^{-x^2})^{(n)} = H_n(x)e^{-x^2}$ admettent n racines réelles distinctes.

2] Uniforme continuité et théorèmes de Heine et de Dini

2.3

Définition 30 : On dit que f est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $d(x;y) < \eta$, alors $d'(f(x);f(y)) < \varepsilon$.

3.2

Théorème 31 : (de Heine) Si E est compact et f continue.
Alors : f est uniformément continue

Contrexemple 32 : L'hypothèse de compacité est vitale.
$x \mapsto x^2$ est continue, non-uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2.6 [Has]

Proposition 33 : Pour X compact et Y complet, $(\mathcal{C}_b(X;Y); d_\infty)$ est complet.

Proposition 34 : Cette métrique caractérise la convergence uniforme.

5.2

Théorèmes 35 : (de Dini) Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})$.
Alors : (1) Si (f_n) est croissante, alors (f_n) converge uniformément vers f
(2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante, alors (f_n) converge uniformément vers f.

3] Application de la compacité en analyse différentielle

[Ber]

Définition 36 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est propre si pour tout $K \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact.

Théorème 37 : (de Cauchy-Lipschitz à paramètre) (admis)
Soit $X_\lambda : (\lambda;t;x) \mapsto X_\lambda(t;x) \in \mathcal{C}^p$ définie sur $\Lambda \times I \times \Omega$ lipschitzienne en x.
Alors : pour tout $(\lambda_0;t_0;u_0) \in \Lambda \times I \times \Omega$, $\exists \delta > 0 \setminus \exists \alpha > 0 \setminus \forall (\lambda;t_0;u) \in \mathcal{B}(\lambda_0;\delta) \times]t_0-\delta;t_0+\delta[\times \mathcal{B}(u_0;\delta)$, la solution $x_\lambda(t;t_0;u)$ à $\begin{cases} x' = X_\lambda(t;x) \\ x(t_0) = u \end{cases}$ soit définie sur $]t_0-\alpha;t_0+\alpha[$. De plus, $x_\lambda \in \mathcal{C}^p$.

Théorème 38 : (d'Hadamard-Lévy) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.
Alors : f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est inversible et f est propre

III] Compacité dans les espaces vectoriels de dimension infinie

1] Théorème de Riesz

I.2.2 [Li]

Lemme 39 : (de Riesz) Soit F sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé E tel que $F \neq E$.
Alors : pour tout $\delta \in]0;1[$, il existe $x \in E$ tel que $\begin{cases} \|x\| = 1 \\ d(x;F) \geq 1-\delta \end{cases}$

Théorème 40 : (de Riesz) S'il existe $\overline{\mathcal{B}(x_0;r)} \subset E$ compacte
Alors : E est de dimension finie.

Corollaire 41 : $\dim(E) < +\infty$ ssi $\overline{\mathcal{B}(0;1)}$ est compacte

Corollaire 42 : Soit E espace normé de dimension infinie.
Alors : tout compact de E est d'intérieur vide.

Corollaire 43 : Soit $A \subset E$ avec E de dimension finie.
Alors : A est compact ssi A est fermé et borné.

Application 44 : En dimension finie, les normes sont équivalentes

2] Théorèmes de Stone-Weierstrass

II.4.1 [Li]

Définition 45 : Soit A sous-algèbre de $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$ avec K compact.
On dit que A sépare les points de K si pour tout $x, y \in K$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

II.4.1

Théorème 46 : (de Stone-Weierstrass réel) Soit K compact, A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$ qui sépare les points de K et qui contient les constantes.
Alors : A est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$.

Application 47 : Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact.
Alors : l'ensemble des polynômes réels à d variables restreint à K est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$.

Remarque 48 : Le résultat précédent peut être démontré en utilisant les polynômes de Bernstein pour $d=1$.

[Li]

Théorème 49 : (de Stone-Weierstrass complexe) Soit K compact, A une sous algèbre de $\mathcal{C}(K;\mathbb{C})$ qui sépare les points de K, qui contient les constantes et qui est stable par conjugaison (ie si $f \in A$, alors $\overline{f} \in A$).
Alors : A est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{C})$.

Application 50 : Soit $K \subset \mathbb{C}$ compact.
Alors : l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en les deux variables z et $\overline{z}$ est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{C})$.

Références :

[GouAn] Les maths en tête Analyse - Rombaldi
[ZQ] Analyse pour l'agrégation - Zuily/Queffe
[Has] Topologie générale et espaces normés - Hassan
[Ber] Analyse pour l'agrégation de maths - Bernis
[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li