201

Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Soit X, Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$.

I| Espaces des fonctions continues

1| Continuité, uniforme continuité

Définition 1 : On dit que f est continue si pour tout $x \in X$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in X$, si $d(x;y) < \delta$, alors $d(f(x); f(y)) < \varepsilon$. On note $\mathcal{C}(X;Y)$ leur ensemble.

Remarque 2 : On peut définir la continuité entre deux espaces topologiques par : pour tout $x \in X$, pour tout $W \in \mathcal{V}_{f(x)}$, $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$.

Exemples 3 : Les applications constantes sont continues.

Proposition 4 : (caractérisation séquentielle de la continuité) f est continue en $a \in X$ ssi pour toute suite (x_n) convergeant vers a $f(x_n) \xrightarrow[+\infty]{} f(a)$

Définition 5 : f est uniformément continue si ~~pour tout $x \in X$~~, $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, si $d(x;y) < \delta$, alors $d(f(x); f(y)) < \varepsilon$.

Exemples 6 : (1) Toute application uniformément continue est continue.
(2) Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Contrexemple 7 : La réciproque est fausse. $x \mapsto x^2$ est continue, non-uniformément continue.

2| Espaces normés des fonctions continues sur un compact

Théorème 8 : Soit X compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue
Alors : f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 9 : (de Heine) Si X compact et f continue.
Alors : f est uniformément continue.

Contrexemple 10 : L'hypothèse de compacité est vitale ! Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue, mais continue.

Proposition 11 : Pour X compact et Y complet, $(\mathcal{C}_{\text{bornées}}(X;Y); d_\infty)$ est un e.m. complet.

Proposition 12 : Cette métrique caractérise la convergence uniforme des suites de fonctions. De plus, si $f_n \xrightarrow[+\infty]{cvu} f$ avec (f_n) continues.
Alors : ~~f_n converge uniformément vers f~~ f est continue.

Contrexemple 13 : La convergence simple ne suffit pas. La suite $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers δ_1 sur $[0;1]$.

Théorèmes : (de Dini)

3| Parties denses

Définition 14 : Soit K compact, A sous-algèbre de Banach de $\mathcal{C}(K; \mathbb{K})$. On dit que A sépare les points de K si pour tout $x, y \in K^2$ tel que $x \neq y$ on ait $f(x) \neq f(y)$ pour une certaine $f \in A$.

Théorème 15 : (de Stone-Weierstrass réel) Soit K compact, A sous-algèbre de Banach de $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$ qui sépare les points de K et qui contient les constantes.
Alors : A est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$.

Application 16 : Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$.
Alors : L'ensemble des polynômes réels à d variables sur K est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{R})$.

Théorème 17 : (de Stone-Weierstrass complexe) Soit K compact, A sous-algèbre de Banach de $\mathcal{C}(K;\mathbb{C})$ qui sépare les points de K, qui contient les constantes et qui est stable par conjugaison (si $f \in A$, alors $\bar{f} \in A$).
Alors : A est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{C})$.

Application 18 : Soit $K \subset \mathbb{C}$ compact.
Alors : L'ensemble des polynômes en les deux variables z et $\bar{z}$ est dense dans $\mathcal{C}(K;\mathbb{C})$.

II| Espaces de Lebesgue

1| Espace L^p et densité avec les fonctions continues

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $p \geq 1$.

Définition 19 : On note $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \sim$ avec $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R}$ mesurable $| \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$ et $f \sim g$ ssi $\|f-g\|_p = 0$.

Proposition 20 : $(L^p(\mu); \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 21 : (de Riesz-Fisher) Soit $p \in [1; +\infty[$.
Alors : L'espace $L^p(\mu)$ est complet i.e. toute suite de Cauchy converge.

Proposition 22 : Pour $p \in [1; +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables sont denses dans $L^p(\mu)$.

Lemme 23 : Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ avec $\mathcal{E}$ dense dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{L}^p(\mu)$.
Alors : $\mathcal{E}$ est dense dans $L^p(\mu)$

Théorème 24 : (1) Pour $p \in [1; +\infty[$, l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans L^p.

[Has] 1.3 2.2 2.3 3.2 1.6 [Has] I.2 II.4 [Li] 9.3 9.4 [Bri]

(2) Pour tout $p \in [1;+\infty[$, $\mathcal{E}_K(\mathbb{R};\mathbb{K})$ est dense dans L^p.
(3) Pour $p=+\infty$, l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$.

Proposition 25 : L^p est séparable si $p \in [1;+\infty[$ et non-séparable si $p=+\infty$.

2) Densité avec les fonctions $\mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$

Définition 26 : Une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {L^1}^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n \, d\lambda_d = 1$; $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda_d < +\infty$ et si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{|x|\geq\varepsilon} |\alpha_n| \, d\lambda_d = 0$.

Exemple 27 : Soit $\alpha \in L^1$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha \, d\lambda_d = 1$. Alors $(\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

[14.4]

Théorème 28 : Soit (α_n) une approximation de l'unité, $p \in [1;+\infty[$, $f \in L^p$.
Alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * \alpha_n \in L^p$ et $f * \alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

[Bri]

Définition 29 : Une suite (α_n) est dite régularisante si c'est une approximation de l'unité et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{K})$.

Exemple 30 : À partir de toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}_K^\infty$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\lambda_d \neq 0$ on peut construire $\alpha := \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\lambda_d}$ et $(\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ suite régularisante.
Typiquement, $\varphi : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) \mathbb{1}_{|x|<1}$ est dans $\mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R}^d;[0;1])$.

[14.5]

Théorème 31 : (1) $\mathcal{E}_K^\infty$ est $\|\cdot\|_\infty$ - dense dans $\mathcal{E}_K$.
(2) Pour $p \in [1;+\infty[$, $\mathcal{E}_K^\infty$ est $\|\cdot\|_p$ - dense dans L^p.

3) Espace de Schwartz et espace de Sobolev

Par la suite, on note $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{E}_K^\infty(\Omega)$ pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 32 : Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. T est une distribution sur Ω si pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe un entier $m_K \in \mathbb{N}$ et $C_K > 0$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $|T(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_{(m)}$ avec $\|\varphi\|_{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \|\varphi^{(j)}\|_\infty$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ leur ensemble.

Définition 33 : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La dérivée $\partial_i T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est définie par : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle \partial_i T ; \varphi \rangle = -\langle T ; \partial_i \varphi \rangle$.

Définition 34 : $H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \text{pour tout } i \in [\![1;n]\!], \partial_i u \in L^2(\Omega)\}$ et on munit cet espace de la norme $\|u\|_{H_1} = \left(\int_\Omega |u|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\partial_i u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
$H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H_1}$.

[Isen]

Lemme 35 : $(H^1(\Omega); \|\cdot\|_{H_1})$ est un espace de Hilbert et si au plus, Ω est borné, alors $(H_0^1(\Omega); \|\cdot\|_{H_1})$ est un espace de Hilbert.

Théorème 36 : (de Riesz) Soit H un espace de Hilbert et $\varphi : H \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue de H.
Alors : il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $\varphi(x) = \langle x \mid y \rangle$

Théorème 37 : (de Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert, f une forme bilinéaire sur H continue et coercive (il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $u \in H$, $f(u;u) \geq \mu \|u\|^2$) et φ forme linéaire continue sur H.
Alors : il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $f(u;v) = \varphi(v)$.

[Isen]

Application 38 : Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i,j \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et $b_0 > 0$. Soit (E) le problème : trouver $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $-\sum_{i,j} \partial_i (a_{i,j} \partial_j u) + b_0 u = f$. Si il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $x = (x_1;\dots;x_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i,j} a_{i,j}(y) x_i x_j \geq \mu \sum_i x_i^2$
Alors : il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème (E).

Définition 39 : On définit $S(\mathbb{R}^n)$, l'espace de Schwartz, comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$ telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $M > 0$ tel que $\|x^\alpha f^{(\beta)}(x)\|_\infty := \sup_{\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq M$.

Lemme 40 : Soit $f \in S(\mathbb{R})$.
Alors : $\mathcal{F}(f) := \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

Proposition 41 : Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E;F)$.
Alors : f est continue ssi f est uniformément continue.

Théorème 42 : (de Plancherel) Soit $\mathcal{S} : \begin{array}{l} S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) \end{array}$.
Alors : $\mathcal{S}$ est bien définie et il existe un unique prolongement continu de $\mathcal{S}$ à $L^2(\mathbb{R})$ qui est un isomorphisme isométrique.

III] Espace des fonctions holomorphes

1] Holomorphie et intégration

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$

3.4 **Définition 43 :** On dit que f est holomorphe sur Ω si pour tout point $a \in \Omega$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe. On note $H(\Omega)$ leur ensemble.

Exemple 44 : Les fonctions polynomiales et les séries entières sont holomorphes.

5.2 **Théorème 45 :** (équations de Cauchy-Riemann) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Alors : f est holomorphe sur Ω ssi $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ avec $\begin{cases} u = \mathrm{Re}(f) \\ v = \mathrm{Im}(f) \end{cases}$.

6.1 **Définition 46 :** On appelle chemin dans Ω toute appli continue[1] $\gamma : [a;b] \to \Omega$. On note $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

6.4 **Théorème 47 :** Soit γ chemin fermé dans Ω et $f \in H(\Omega)$

Alors : $\int_\gamma f(z)dz = 0$

6.3 **Définition 48 :** Soit $\gamma : [a;b] \to \Omega$ chemin fermé, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.
L'indice de z par rapport à γ est : $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dt}{t-z}\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$.

Théorème 49 : L'application $\begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z) \end{array}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constantes sur chaque composante connexe ~~non-bornée~~ de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ et nulle sur la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.

[Tau] **Exemple 50 :** Soit γ le cercle $\mathcal{C}(a;r)$ orienté direct.

Ainsi, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z-a| > r \\ 1 & \text{si } |z-a| < r \end{cases}$

2] Propriétés de l'espace de fonctions $H(\Omega)$

6.4 **Théorème 51 :** (de Cauchy pour un convexe) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert convexe, $w \in \Omega$ et f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{w\}$

Alors : f possède une primitive sur Ω et pour tout chemin fermé γ dans Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

[Tau] **Corollaire 52 :** (formule de Cauchy pour un convexe) Soit γ un chemin fermé sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert convexe, $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ et $f \in H(\Omega)$

Alors : $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$.

Théorème 53 : Soit $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega)$. 6.5 [Tau]

Alors : (1) $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a; \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

(2) Si Ω convexe, et si γ est un chemin fermé dans Ω, tel que $a \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,d\xi$$

Exemple 54 : $\exp(z) = \sum^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Références :

[Has] Topologie générale et espaces normés - Hassan

[GouAn] Les maths en tête Analyse - Gourdon

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li

[Bri] Analyse Théorie de l'intégration - Briane/Pa

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenman

[Tou] Analyse complexe pour la licence 3 - Touvel