

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $n \in \mathbb{N}^*$.

I] Utilisation du déterminant en géométrie

1] Orientation de l'espace

Définition 1: On dit que deux bases d'un espace vectoriel réel de dimension finie ont même orientation si: $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}(e_i)) > 0$. Sinon, on dit qu'elles ont une orientation opposée.

Proposition 2: L'ensemble $\mathcal{B}$ des bases de E se partage en $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \sqcup \mathcal{B}_-$ avec toutes les bases de $\mathcal{B}_+$ (resp. $\mathcal{B}_-$) de même orientation.

Définition 3: On dit que l'on a fixé une orientation de E si l'on choisit une des classes d'orientation de E .

Exemple 4: En choisissant la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $\{e_i\}_{i=1}^n$ comme orientation positive, la base $\{-e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est orientée négativement.

2] Aires et volumes

Théorème 5: L'aire du parallélogramme engendré par $u, v \in (\mathbb{R}^2)^2$ est: $\mathcal{A}(u, v) = |\det(u, v)|$

Théorème 6: Soit $v_1, \dots, v_n \in (\mathbb{R}^n)^n$.

Alors le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$ est: $\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) := |\det(v_1, \dots, v_n)|$.

3] Distances

Définition 7: Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ espace euclidien, $v_1, \dots, v_n \in E$. On appelle matrice de Gram de $(v_1, \dots, v_n)$ la matrice: $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n) := (\langle v_i, v_j \rangle)_{i, j \in \{1, \dots, n\}}$. On note $\Delta(v_1, \dots, v_n)$ son déterminant.

Proposition 8: Dans ce cas, $\{v_1, \dots, v_n\}$ est libre ssi $\Delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Théorème 9: Avec les mêmes notations, soit $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, $x \in E$.

$$\text{Alors: } d(x, F)^2 = \frac{G(x; v_1, \dots, v_n)}{\Delta(v_1, \dots, v_n)}$$

4] Approche d'isobarycentres

Définition 10: On appelle isobarycentre de $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^n$ le complexe $\frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$.

Lemme 11: (déterminant circulant) Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}^n$

$$\text{Alors: } \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (e^{i \frac{2\pi j}{n}})^{jk}$$

Application 12: Soit P polygône complexe de sommets $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $P_0 = P$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, P_{k+1} est le polygône de sommets les milieux des arêtes de P_k .

Alors: $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P .

II] Classification des isométries du plan et de l'espace

1] Éléments de $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$

Soit E espace affine euclidien de dimension 2 de direction E .

Proposition 13: Soit $A \in \text{O}_2(\mathbb{R})$

Alors: (1) Si $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$, alors: $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ rotation d'angle θ
(2) Si $A \notin \text{SO}_2(\mathbb{R})$, alors: $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$.

Corollaire 14: $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est composé de l'identité, des rotations autour d'un point $\neq 0$ d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ notées $R_{\theta, a}$, des réflexions par rapport à une droite D notées S_D , des translations t_v et des composées de ces applications.

A.8

[Gri]

Lemme 15: Soit $f: E \rightarrow E$ application affine, $\text{Fix}(f)$ points fixes
Alors: (1) Si $1 \notin \text{Sp}(f)$, alors f admet un UNIQUE point fixe
 (2) Si $1 \in \text{Sp}(f)$, alors: soit $\text{Fix}(f) = \emptyset$, soit il existe un point fixe Ω et $\text{Fix}(f)$ est un sous-espace affine de direction l'espace propre de 1.

Proposition 16: Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{\Omega, \theta}$.

Alors: f est une rotation d'angle θ autour du point:
 $\Omega = \Omega - (R_{\theta, \theta} - \text{id})^{-1}(\vec{v})$.

Proposition 17: Soit $f = t_{\vec{v}} \circ s_D$

Alors: (1) Si $\vec{v} \in D^\perp$, alors f est une réflexion par rapport à la droite D' parallèle à D passant par $\frac{1}{2}\vec{v}$.

(2) Si $\vec{v} \notin D^\perp$, alors f est appelé un glissement.

Théorème 18: $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est composé de: l'identité, des rotations, des réflexions, des glissements et des translations.

2) Éléments de $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$

Proposition 19: Soit $A \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$, $\{e_i\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \text{Mat}_{\{e_i\}}(f)$.

Alors: il existe une base $\{e_i\}$ orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que:

$$\text{Mat}_{\{e_i\}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \text{ où } \epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \text{SO}_3(\mathbb{R}) \\ -1 & \text{si } A \notin \text{SO}_3(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Corollaire 20: $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ est composé de l'identité, des rotations $R_{D, \theta}$ d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ autour d'une droite affine D , des réflexions par rapport à un plan affine S_P , des rotations-réflexions $s_P \circ R_{D, \theta}$, des translations $t_{\vec{v}}$ et des composées.

Proposition 21: Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{D, \theta}$

Alors: (1) Si $\vec{v} \perp D$, alors: f est une rotation autour d'une axe D' de même direction que D

(2) Si $\vec{v} \not\perp D$, alors f est appelé vissage.

Proposition 22: Soit $f = t_{\vec{v}} \circ s_P$

Alors: (1) Si $\vec{v} \perp P$, alors f est une réflexion $s_{P'}$ par rapport à un plan $P' = t_{\frac{1}{2}\vec{v}}(P)$ translaté de P .

(2) Si $\vec{v} \not\perp P$, alors: f est appelé glissement.

Proposition 23: Soit $f = t_{\vec{v}} \circ (s_P \circ R_{D, \theta})$ avec $D \perp P$

Alors: f est une rotation-réflexion

Théorème 24: $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ est composé de l'identité, des rotations autour d'un axe, des réflexions par rapport à un plan, des rotations-réflexions, des vissages, des glissements et des translations.

III) Isométries préservant une partie et application

1) Groupes diédraux et isométries de polygones réguliers

Définition 25: On dit qu'un groupe multiplicatif G est diédral de type D_n si il est dicyclique engendré par un élément ρ d'ordre n et un élément $\sigma \neq e$ d'ordre 2, $\rho \sigma \rho = \text{id}$.

Théorème 26: Soit G groupe diédral de type D_n .

Alors: $G = \{\text{id}; \rho; -\rho^{n-1}\} \cup \{\sigma; \sigma\rho; -\sigma\rho^{n-1}\}$ est d'ordre $2n$.

Corollaire 27: Deux groupes diédraux de type D_n sont isomorphes.

Exemple 28: Dans $\mathbb{R}^2$, la rotation ρ d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la réflexion σ d'axe $\mathbb{R}(\frac{1}{2})$ engendrent un groupe $\langle \rho; \sigma \rangle$ diédral de type D_n .

Définition 29: On désigne par $P_n = \{A_n = \rho^k(\frac{1}{2}) \mid k \in \{0, n-1\}\}$ l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés et $\text{Isom}(P_n) = \{g \in \text{O}(E) \mid g(P_n) = P_n\}$ les isométries conservant P_n .

Théorème 30: Pour ρ et σ comme dans l'exemple 28, on a:

$$\text{Isom}(P_n) = \langle \rho; \sigma \rangle = \{\text{id}; \rho; -\rho^{n-1}\} \cup \{\sigma; \sigma\rho; -\sigma\rho^{n-1}\}$$

Exemple 31: S_3 est isomorphe au groupe du triangle équilatéral il est donc diédral de type D_3 .

A.8 [Gri]

III.4.3

[Row]

VII.10

A.8

[Gri]

2) Quaternions et application aux jeux-vidéos

Définition 32: Le corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre non-commutative engendrée par i, j, k telle que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k$; $jk = i$; $ki = j$.

On appelle norme du quaternion $q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$ la quantité $N(q) := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ et on note

$$Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = 1\} \text{ et } \text{Im}(\mathbb{H}) = \{q \in \mathbb{H} \mid \text{Re}(q) = 0\}$$

Propriétés 33: Soit $q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

Abn: (1) $2\text{Re}(q) = q + \bar{q}$ avec $\bar{q} = a - ib - jc - kd$

$$(2) \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$$

$$(3) N(q)^2 = q \bar{q}$$

$$(4) Z(\mathbb{H}) := \{q \in \mathbb{H} \mid \forall q' \in \mathbb{H}, qq' = q'q\} = \mathbb{R}$$

$$(5) Z(\mathbb{H}) \cap Sp(1) = \{\pm 1\}.$$

Lemme 34: La sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs et $Sp(1)$ est connexe par arcs.

Définition 35: Un retournement de $\mathbb{R}^3$ par $v \in \mathbb{R}^3$ est

$$r_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, z \mapsto z - \frac{2\langle z, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Théorème 36: $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements

Théorème 37: $SO_3(\mathbb{R})$ est isomorphe à $Sp(1) / \{\pm 1\}$

Remarque 38: En pratique, pour faire des calculs faisant intervenir des rotations dans l'espace, on préfère utiliser des quaternions que des matrices à sinus et cosinus.

Références:

[Gri] Algèbre Linéaire

- Grifone

[Iseu] L'oral à l'agrégation de mathématiques

- Isenmann

[Rau] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie - Raubaldi