171

Formes quadratiques réelles, coniques. Exemples et applications.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

I] Formes quadratiques réelles

1] A partir des formes bilinéaires

XI.1 [Rom]

Définition 1: On dit que $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique s'il existe $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E telle que: $\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x;x)$.

Remarque 2: Il n'y a pas unicité de la forme bilinéaire associée.

Exemple 3: $\varphi(x;y) = x_1y_1 + x_2y_2$ et $\psi(x;y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ définissent la même forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Théorème 4: Soit $q : E \to \mathbb{R}$ forme quadratique.
Alors: il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que: $\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x;x)$ donnée par:
$$\varphi(x;y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right].$$

Corollaire 5: L'espace $Q(E)$ des formes quadratiques sur E est isomorphe à $S_2(E)$ l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E et à $S_n(\mathbb{R})$. De plus, $\dim(Q(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$

Définition 6: Soit $q \in Q(E)$. On appelle forme polaire de q:
$$\varphi(x;y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right] = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$$
Soit $\mathcal{B}$ base de E. On note $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i;e_j))$, et $\Delta_{\mathcal{B}}(q) = \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi) = \det(\varphi(e_i,e_j))$.

Proposition 7: Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire φ, $\mathcal{B}$ base de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(q)$.
Alors: $\forall x \in E$, $q(x) = {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{i,j} x_i x_j$
$\forall x,y \in E$, $\varphi(x;y) = \langle AX \mid Y \rangle$.

2] Réduction et méthode de Gauss

IX.5

Définition 8: Une base (e_i) de E est dite orthogonale (resp. orthonormée) pour φ si $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i;e_j) = 0$ (resp. si $\forall i,j$, $\varphi(e_i;e_j) = \delta_{i,j}$).

Proposition 9: $\{e_i\}$ est une base orthogonale de E ssi $Mat_{\{e_i\}}(q) = \begin{pmatrix} q(e_1) & & \\ & \ddots & \\ & & q(e_n) \end{pmatrix}$

[Gri]

Remarque 10: Dans ce cas, le rang de q est le nombre de $q(e_i)$ non-nuls.

Proposition 11: S'il existe une base orthonormée, alors q est de rang n.

Théorème 12: Il existe une base une base orthogonale de E pour q i.e. il existe une base $\{e_i\}$ telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$, avec $r = \mathrm{rang}(q)$ ou $Mat_{\{e_i\}}(q) = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_r & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 13: (théorème spectral) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
Alors: $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ \ ${}^tPAP$ est diagonale.

VII.3

Proposition 14: (méthode de réduction de Gauss avec terme carré) Soit e la base canonique et $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{i,j} x_i x_j$, $a_{i_0,i_0} \neq 0$

(1) On ordonne suivant la variable x_{i_0}

(2) On écrit les termes contenant x_{i_0} comme début d'un carré

(3) On obtient le carré d'une forme linéaire, plus, des termes qui ne contiennent pas x_{i_0}

(4) On recommence avec les termes ne contenant pas x_{i_0} jusqu'à obtenir une somme de carrés de formes linéaires.

Exemple 15: $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ se réduit en $q(x) = (x_1+x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$.

IX.6

Proposition 16: (méthode de réduction de Gauss sans termes carrés) Soit e base canonique de E, $q(x) = \sum a_{i,j} x_i x_j$

(1) On choisit un terme rectangle i,j : kx_ix_j avec $k \neq 0$.

(2) On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial q}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial q}{\partial x_j}$ pour écrire:
$q(x) = \frac{1}{k}\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_j}$ + termes correctifs

(3) On obtient $q(x) = \frac{1}{k}\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ + termes ne contenant ni x_i ni x_j.

IX.6 [Gri]

(4) On écrit $\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{4}\left[(\varphi_1+\varphi_2)^2-(\varphi_1-\varphi_2)^2\right]$

(5) Si dans les termes correctifs, il y a un carré, on procède comme avant. Sinon, on continue.

__Exemple 17 :__ $q(x)=5x_1x_2+6x_1x_3+3x_2x_3$ se réduit en
$q(x)=\frac{1}{20}\left[5x_1+5x_2+9x_3\right]^2-\frac{1}{20}\left[5x_1+7x_2-3x_3\right]^2-\frac{18}{5}x_3^2$.

__Théorème 18 :__ À partir de la réduction de Gauss, on peut déterminer une base orthogonale pour q en résolvant $\begin{cases} x_1'=\varphi_1(x) \\ \vdots \\ x_n'=\varphi_n(x)\end{cases}$ avec les φ_i obtenues grâce à la réduction de Gauss.

__Exemple 19 :__ Si $q(x)=x_1^2+3x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+8x_2x_3$, alors la réduction de Gauss donne $q(x)=(x_1+x_2)^2+2(x_2+2x_3)^2-x_3^2$ et le système à résoudre $\begin{cases} x_1'=x_1+x_2 \\ x_2'=x_2+2x_3 \\ x_3'=x_3\end{cases}$ d'où $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est une base de vecteurs orthogonaux.

3) Orthodiagonalisation simultanée

IX.10 [Gri]

Soit $(E;\langle\,|\,\rangle)$ espace euclidien, q forme quadratique sur E.

__Lemme 20 :__ Soit φ forme polaire de q.
__Alors :__ $\exists!\, f_\varphi\in \mathrm{End}(E) \mid \forall x,y\in E,\ \langle x\,|\,f_\varphi(y)\rangle=\varphi(x;y)$.

__Lemme 21 :__ Dans ce cas, f_φ est auto-adjoint pour $\langle\,|\,\rangle$.

__Lemme 22 :__ Dans ce cas, les sous-espaces propres de f_φ sont deux à deux orthogonaux pour $\langle\,|\,\rangle$.

__Théorème 23 :__ Il existe une base de E orthogonale pour q et pour $\langle\,|\,\rangle$.

__Corollaire 24 :__ Soit e base de E et $S=\mathrm{Mat}_e(q)$.
__Alors :__ On peut construire une base orthogonale de q formée de vecteurs propres de S.

__Exemple 25 :__ Pour $q(x)=-2x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+6x_1x_2+6x_2x_3+6x_1x_3$,
$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est une base orthogonale pour q et pour $\langle\,|\,\rangle$.

II) Classification des formes quadratiques

1) Cas complexe et signature

IX.7

__Théorème 26 :__ Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $q\in Q(E)$.
__Alors :__ il existe une base $\{e_i\}$ telle que si $x=\sum_i^n x_ie_i$, alors $q(x)=x_1^2+\dots+x_r^2$ avec $r=\mathrm{rg}(q)$ i.e. $\mathrm{Mat}_{\{e_i\}}(q)=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&0&\\&&&\ddots\end{pmatrix}$

__Corollaire 27 :__ Dans ce cas, il existe une base orthonormée de E ssi $\mathrm{rg}(q)=n$.

IX.8 [Gri]

__Théorème 28 :__ Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $q\in Q(E)$.
__Alors :__ il existe une base e de E telle que si $x=\sum_{i}^{n} x_ie_i$,
$q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$ i.e. $\mathrm{Mat}_e(q)=\begin{pmatrix}I_p&&(0)\\&-I_{r-p}&\\(0)&&0_{n-r}\end{pmatrix}$

__Définition 29 :__ Dans ce cas, le couple $\mathrm{sign}(q)=(p;r-p)$ est appelé signature de q.

__Corollaire 30 :__ Dans ce cas,
(1) q est définie positive ssi $\mathrm{sign}(q)=(n;0)$ ssi il existe des BON
(2) q est définie négative ssi $\mathrm{sign}(q)=(0;n)$
(3) q est non-dégénérée ssi $\mathrm{sign}(q)=(p;n-p)$

__Exemple 31 :__ Pour $q(x)=x_1^2+2x_2^2+15x_3^2-4x_1x_2-6x_1x_3-8x_2x_3$ se réduit en $q(x)=x_1'^2-x_2'^2+x_3'^2$ d'où : $\mathrm{sign}(q)=(2;1)$.

2) Étude des isométries associées à une forme quadratique

[H2G2]

__Définition 32 :__ Soit $p,q\in\mathbb{N}^*$. On note $O(p;q)$ le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique
$q:\ \mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R},\ (x_1;\dots;x_{p+q})\mapsto x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_{p+q}^2$ de signature $(p;q)$
dont la matrice dans la base canonique est $I_{(p;q)}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$
$O(p;q)=\{M\in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid M\, I_{(p;q)}\, {}^tM=I_{(p;q)}\}$

__Proposition 33 :__ $\exp: S_n(\mathbb{R})\to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

__Théorème 34 :__ Soit $p,q\in\mathbb{N}^*$.
__Alors :__ $O(p;q)$ et $O_p(\mathbb{R})\times O_q(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{pq}$ sont homéomorphes.

VII.2 [Rou] VI.2

3] Applications en analyse différentielle

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable

Définition 35 : On dit que f est deux fois différentiable si Df est différentiable. Dans ce cas, $d^2f = d(df)$ et $H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$

Remarque 36 : Dans ce cas, $(h;k) \mapsto {}^t h\, H_f(a)\, k$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associée à la différentielle seconde.

Théorème 37 : Soit $a \in U$.
Alors : (1) Si f a un minimum local et d_a^2 existe alors $d_a f = 0$ et $d_a^2 f$ est une forme quadratique positive.
(2) Si $d_a^2 f$ est une forme quadratique définie positive et $d_a f = 0$, alors : f admet un minimum local strict en a.

[Isen]

Lemme 38 : Soit $\|\cdot\|$ norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres à partie réelle strictement négative.
Alors : $\exists \alpha > 0 \mid \exists \lambda > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}_+$, $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\alpha t}$

Théorème 39 : (de Liapounov) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $d_0 f$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative.
Alors : 0 est point d'équilibre stable du système $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

A.12 [Gri]

III] Application à l'étude des coniques

1] À partir d'une forme quadratique et d'une forme linéaire

Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$, $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$, $k \in \mathbb{R}$

Définition 40 : On appelle conique l'ensemble :
$$C = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid q(v) + \varphi(v) = k\}$$

Remarque 41 : Quitte à échanger de signe, on peut supposer que $\mathrm{sig}(q) = (2;0)$ ou $(1;1)$ ou $(1;0)$

Proposition 42 : Soit e base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Alors : l'équation d'une conique est de la forme :
$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y = k$$

Exemple 43 : Pour $\alpha = \gamma = k = 1$ et $\beta = \lambda = \mu = 0$, on retrouve l'équation du cercle unité

A.12 [Gri]

Proposition 44 : Par le théorème d'orthodiagonalisation simultanée, il existe une base b de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et $\langle 1 \rangle$ où l'équation de la conique est : $ax^2 + by^2 - 2rx - 2sy = k$

Théorème 45 : (de classification des coniques)
(1) Si q est non-dégénérée i.e. $a, b \neq 0$. Soit $h = k - \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(\frac{s}{b}\right)^2$.
(i) Si $\mathrm{sign}(q) = (2;0)$, alors $a, b > 0$.
- Si $h = 0$, alors C est réduit à un point
- Si $h < 0$, alors $C = \emptyset$
- Si $h > 0$, alors C est une ellipse de centre $\left(\frac{r}{a}; \frac{s}{b}\right)$ et C est décrite par $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ avec $A = \sqrt{\frac{h}{a}}$, $B = \sqrt{\frac{h}{b}}$.

(ii) Si $\mathrm{sign}(q) = (1;1)$, alors $ab < 0$
C est une hyperbole et si $a > 0$ et $b < 0$, C
- Si $h \neq 0$, alors C est décrite par $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ avec $A = \sqrt{\frac{h}{a}}$ et $B = \sqrt{-\frac{h}{b}}$.
- Si $h = 0$, alors C est réduite à deux droites d'équation $y = \pm\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}\, x$

(2) Si q est dégénérée, alors $ab = 0$ et $\mathrm{sign}(q) = (1;0)$ on peut supposer $a \neq 0$ et $b = 0$ d'où : $a\left(x - \frac{r}{a}\right)^2 - 2sy = h$
(i) Si $s \neq 0$, alors C est une parabole d'équation $y = ax^2$
(ii) Si $s = 0$, alors on a : $x^2 = \frac{h}{a}$
- Si $h < 0$, alors $C = \emptyset$
- Si $h = 0$, alors C est réduit à la droite $x = 0$
- Si $h > 0$, alors C est deux droites parallèles.

XVI.3 [Rou]

2] Définition métrique des coniques

Soit $\mathbb{R}^2$ plan affine euclidien, D droite affine de $\mathbb{R}^2$, $F \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ et $e \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 46 : On appelle conique de directrice D, foyer F et d'excentricité e l'ensemble $C = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M;F) = e \times d(M;D)\}$

Remarque 47 : Comme $F \notin D$, $d(M;D) > 0$ pour tout $M \in C$ et on peut écrire $C = \{M \in \mathcal{P} \setminus D \mid \frac{MF}{MH} = e\}$ avec H la projection orthogonale de M sur D.

XVI.3 [Rom]

Notation 48 : On note Δ la droite perpendiculaire à D passant par F (et par K la projection orthogonale de F sur D).

Lemme 49 : La droite Δ coupe C en un ou deux points :

(1) Pour $e=1$, $C \cap \Delta = \{A\}$ avec A milieu de $[F;K]$

(2) Pour $e \neq 1$, $C \cap \Delta = \{A';A\}$ avec $A\left(\frac{ke}{1+e};0\right)$ barycentre de $\{(F;1);(K;e)\}$ et $A'\left(-\frac{ke}{1+e};0\right)$ barycentre de $\{(F;1);(K;-e)\}$.

Théorème 50 : L'ensemble C est une conique non-dégénérée, pour $e=1$ c'est une parabole, pour $e<1$, c'est une ellipse, pour $e>1$ c'est une hyperbole.

Références :

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie – Rombaldi

[Gri] Algèbre linéaire – Grifone

[H2G2] Histoires hédonistes de groupes et géométrie – Caldero

[Rou] Petit guide de calcul différentiel – Rouvière

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques – Isenmann