161

Distances et isométries d'un espace affine euclidien

Définition 1 : Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $\mathcal{E}$ ensemble non-vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que $(\mathcal{E};E)$ est un espace affine. On dit que $(\mathcal{E};E)$ est un espace affine euclidien si E est un espace vectoriel euclidien.
Par la suite on considère $(\mathcal{E};E)$ espace affine euclidien.

I] Distance dans un espace euclidien

1] Notion de distance

[Tau] III.2

Définition 2 : Soit $P,Q \in \mathcal{E}$. La distance associée à la norme de E de P et Q est : $d(P;Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$

Exemple 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, la distance de $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ est $\sqrt{3}$.

Proposition 4 : Cette définition est bien celle d'une distance sur $\mathcal{E}$.

Définition 5 : Soit $M \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{A},\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$. On définit :
$d(M;\mathcal{A}) := \inf\{d(M;N) \mid N \in \mathcal{A}\}$ $d(\mathcal{A};\mathcal{B}) = \inf\{d(P;Q) \mid (P,Q) \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}\}$

Exemple 6 : Soit $\mathcal{A},\mathcal{B}$ deux droites sécantes de $\mathbb{R}^n$, alors $d(\mathcal{A};\mathcal{B}) = 0$.

2] Lien avec le déterminant et les matrices de Gram

[Gri] XII. exo 13

Définition 7 : Soit $\vec{v_1};\dots;\vec{v_p} \in E$. On appelle matrice de Gram : $\mathrm{Gram}(\vec{v_1};\dots;\vec{v_p}) = \begin{pmatrix} \langle\vec{v_1}|\vec{v_1}\rangle & \cdots & \langle\vec{v_1}|\vec{v_p}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\vec{v_p}|\vec{v_1}\rangle & \cdots & \langle\vec{v_p}|\vec{v_p}\rangle \end{pmatrix}$ et on note :
$G(\vec{v_1};\dots;\vec{v_p}) = \det(\mathrm{Gram}(\vec{v_1};\dots;\vec{v_p}))$.

Exemple 8 : Pour la base canonique de E, $\mathrm{Gram}(\vec{e_1};\dots;\vec{e_p}) = I_p$

Proposition 9 : $\{\vec{v_1};\dots;\vec{v_p}\} \in E$ est libre ssi $G(\vec{v_1};\dots;\vec{v_p}) \neq 0$

Théorème 10 : Soit $\{\vec{v_1};\dots;\vec{v_p}\} \in E$ famille libre, $F = \langle\vec{v_1};\dots;\vec{v_p}\rangle$ et $\vec{x} \in E$.
Alors : $d(x;F) = \dfrac{G(\vec{x};\vec{v_1};\dots;\vec{v_p})}{G(\vec{v_1};\dots;\vec{v_p})}$

[Tau] III.4

Théorème 11 : Soit $(\mathcal{F};F)$ sous-espace de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$.
Alors : (1) La projection orthogonale de A sur $\mathcal{F}$: $\pi_{\mathcal{F}}(A)$ est l'unique point de $\mathcal{F}$ tel que $A\pi_{\mathcal{F}}(A) = d(A;\mathcal{F})$
(2) Pour tout $P \in \mathcal{F}$ et tout $(\vec{e_1};\dots;\vec{e_r})$ base de F,
$$d(A;\mathcal{F})^2 = \frac{G(\overrightarrow{A\pi_{\mathcal{F}}(A)};\vec{e_1};\dots;\vec{e_r})}{G(\vec{e_1};\dots;\vec{e_r})}$$

Théorème 12 : Soit $(\mathcal{F};F)$ et $(\mathcal{G};G)$ sous-espaces de $\mathcal{E}$.
Alors : (1) Il existe $(A;B) \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$ tels que $d(\mathcal{F};\mathcal{G}) = AB$. Ce couple est unique ssi $F \cap G = \{0\}$.
(2) Si $(P;Q) \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$ et $(\vec{e_1};\dots;\vec{e_m})$ est une base de $F+G$, alors :
$$d(\mathcal{F};\mathcal{G})^2 = \frac{G(\overrightarrow{PQ};\vec{e_1};\dots;\vec{e_m})}{G(\vec{e_1};\dots;\vec{e_m})}$$

II] Isométries dans un espace affine et dans un espace vectoriel

1] Groupe des isométries vectorielles et réduction

[Rom] XXII.3

Soit pour ce paragraphe E espace euclidien muni du p.s. $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Définition 13 : Une isométrie vectorielle de E est une application $u : E \to E$ telle que pour tout $\vec{x},\vec{y} \in E$, $\langle u(\vec{x})|u(\vec{y})\rangle = \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$.

Exemple 14 : Les seules homothéties $x \mapsto \lambda x$ qui sont des isométries vectorielles sont id et $-id$.

Théorème 15 : u est une isométrie ssi pour tout $\vec{x} \in E$, $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$.

XXII.10

Définition 16 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exemple 17 : $S(E)$, $A(E)$, $O(E)$ sont des ensembles d'endomorphismes normaux.

Lemme 18 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et F sous-espace vectoriel de E stable par u.
Alors : $F^\perp$ est stable par u

XXII.10 [Rom]

Lemme 19 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors : il existe P sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Lemme 20 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.
Alors : il existe $P_1, \dots, P_r$ sous-espaces vectoriels de E de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u tels que :
$$E = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$$

Théorème 21 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal
Alors : il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E tq : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & (0) \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_r \end{pmatrix}$
avec D_p diagonale, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$, $a_k \neq 0$ tq : $p + 2r = n$.

2] Groupe des isométries affines

VI.1 [Tau]

Définition 22 : Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est appelée une isométrie si elle est bijective et pour tout $P, Q \in \mathcal{E}$, $d(f(P); f(Q)) = PQ$.
On note $Isom(\mathcal{E})$ leur ensemble. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ partie non-vide, on note $Isom_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) = \{ f \in Isom(\mathcal{E}) \mid f(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \}$.

Théorème 23 : Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$
Alors : $f \in Isom(\mathcal{E})$ ssi pour tout $P, Q \in \mathcal{E}$, $d(f(P); f(Q)) = PQ$
ssi $f \in Aff(\mathcal{E})$ et $\vec{f} \in O(E)$

Proposition 24 : L'application $\begin{array}{ccc} Isom(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \{\pm 1\} \\ f & \longmapsto & \det(\vec{f}) \end{array}$ est un morphisme de groupes de noyau $Isom^+(\mathcal{E})$.

Définition 25 : Un élément de $Isom^+(\mathcal{E})$ (resp. $Isom^-(\mathcal{E})$) est appelé un déplacement (resp. un antidéplacement) de $\mathcal{E}$.

Exemple 26 : Une translation de $\mathcal{E}$ est un déplacement de $\mathcal{E}$.

III] Isométries en dimension 2 et 3

1] Classification des isométries du plan

VII.10

Théorème 27 : Soit $u \in O(\mathbb{R}^2)$
Alors : (1) Si $u \in SO(\mathbb{R}^2)$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0; 2\pi[$ tq : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
ie u est une rotation d'angle θ.
(2) Si $u \notin SO(\mathbb{R}^2)$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0; 2\pi[$ tq : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
ie u est une symétrie d'axe la droite formant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses.

A.8 [Gri]

Lemme 28 : Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine et $Fix(f) = \{$points fixes de $f\}$
Alors : (1) Si $1 \notin Spec(\vec{f})$, alors f admet un unique point fixe
(2) Si $1 \in Spec(\vec{f})$, alors soit $Fix(f) = \emptyset$, soit il existe un point fixe Ω et $Fix(f) = \Omega + E_1(\vec{f})$ ie. c'est un sous-espace affine de direction l'espace propre de 1.

Proposition 29 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{\Omega, \theta}$
Alors : en vectorialisant en Ω, $\vec{f} = R_{\Omega, \theta}$ et donc $1 \in Spec(\vec{f})$ ie f est une rotation

Proposition 30 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ s_D$
Alors : $1 \in Spec(\vec{f})$ et (1) Si f admet une droite de points fixes, alors f est une réflexion par rapport à une droite
(2) Si f n'a pas de points fixes, alors f est un glissement ie composé d'une translation et d'une réflexion

Théorème 31 : $Isom(\mathcal{E})$ est composé de l'identité, des rotations autour d'un point, des réflexions par rapport à une droite, des glissements et des translations.

[VII.10]

2) Classification des isométries de l'espace

Proposition 32 : Soit $\vec{f} \in O(\mathbb{R}^3)$

Alors : il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et : } \mathcal{B} = (\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$$

(1) Si $\varepsilon = 1$, alors $\vec{f} \in SO(\mathbb{R}^3)$
- Si $\theta = 0$, alors $\vec{f} = id_{\mathbb{R}^3}$
- Si $\theta = \pi$, alors $\vec{f}$ est un renversement d'axe $Vect(\vec{e_3})$
- Sinon, $\vec{f}$ est une rotation d'angle θ d'axe $Vect(\vec{e_3})$

(2) Si $\varepsilon = -1$, alors $\vec{f} \notin SO(\mathbb{R}^3)$
- Si $\theta = 0$, alors $\vec{f}$ est une réflexion de plan $Vect(\vec{e_1};\vec{e_2})$
- Si $\theta = \pi$, alors $\vec{f} = -id_{\mathbb{R}^3}$
- Sinon, $\vec{f}$ est une anti-rotation d'angle θ d'axe $Vect(\vec{e_3})$

[Gri]

Corollaire 33 : $Isom(\mathbb{R}^3)$ est composé de l'identité, des rotations $R_{D,\theta}$ d'angle $\theta \in [0;2\pi[$ autour d'une droite affine D, des réflexions par rapport à un plan affine S_P, des "réflexions-rotations" $S_P \circ R_{D,\theta}$ où P est un plan orthogonal à D, des translations $t_{\vec{v}}$ et de leurs composées.

3) Un lien entre $SO(\mathbb{R}^3)$ et l'algèbre des quaternions

[Isen]

Définition 34 : Le corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre non-commutative engendrée par i, j, k tels que :
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k$; $jk = i$; $ki = j$ de norme
pour tout $q = a + ib + jc + kd$, $N(q) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

Propriétés 35 : Soit $q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ et $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = 1\}$

Alors : (1) $2Re(q) = q + \bar{q}$ et $\overline{q_1 q_2} = \bar{q_2}\,\bar{q_1}$

(2) $N(q)^2 = q\bar{q}$

(3) $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ et $Z(\mathbb{H}) \cap Sp(1) = \{\pm 1\}$

Lemme 36 : La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. En particulier, $Sp(1)$ est connexe par arcs. [Isen]

Théorème 37 : Un retournement de $\mathbb{R}^3$ par $v \in \mathbb{R}^3$ est $r_v :$
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ z &\mapsto 2\frac{\langle z;v\rangle}{\|v\|^2}v - z \end{aligned}$$

Théorème 38 : $SO(\mathbb{R}^3)$ est engendré par les retournements.

Théorème 39 : $SO(\mathbb{R}^3) \simeq Sp(1)/\{\pm 1\}$

4) Isométries et groupe diédral

Définition 40 : On dit qu'un groupe multiplicatif G est diédral de type $\mathbb{D}_{2n}$ s'il est cyclique engendré par un élément ρ d'ordre n et un élément $\sigma \neq \rho$ d'ordre 2 tel que $\rho\sigma\rho\sigma = id$. [III.4.3]

Théorème 41 : Soit G groupe diédral de type $\mathbb{D}_{2n}$. [Rau]

Alors : $G = \{id;\rho;\dots;\rho^{n-1}\} \cup \{\sigma;\sigma\rho;\dots;\sigma\rho^{n-1}\}$ et est d'ordre $2n$

Corollaire 42 : Deux groupes diédraux de type $\mathbb{D}_{2n}$ sont isomorphes

Exemple 43 : Dans le plan, la rotation ρ d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la réflexion σ d'axe $\mathbb{R}e_1$ avec $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ forment un groupe $\langle\rho;\sigma\rangle$ diédral de type $\mathbb{D}_{2n}$.

Définition 44 : On note $\Gamma_n = \{A_k = \rho^k(e_1) \mid k \in [\![0;n-1]\!]\}$ l'ensemble des sommets d'un polygône régulier à n côtés et on note :
$Isom(\Gamma_n) = \{u \in O(E) \mid u(\Gamma_n) = \Gamma_n\}$.

Exemple 45 : S_3 est isomorphe au groupe du triangle équilatéral il est donc diédral de type $\mathbb{D}_6$.

Théorème 46 : (de Dixon) Soit G groupe non-abélien fini. [Ies]

Alors : la probabilité $p(G)$ pour que deux éléments de G tirés au hasard commutent vérifie : $p(G) \leq \frac{5}{8}$

Application 47 : $p(\mathbb{D}_8) = \frac{5}{8}$.

Références :

[Tau] Géométrie - Tauvel

[Gri] Algèbre Linéaire - Grifone

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie - Rombaldi

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesure